Bigarren Hezkuntzako Unibertsitate Masterra

Master Bukaerako Lana

Matematika

Triangelu zuzenen ebazpena eredu-dinamikoen bidez DBH4ko aniztasunean

Nahia Belloso Sancet

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

Laburpena

Master Bukaerako Lan honek Ikuspegi Ontosemiotikoan (IOS) oinarrituko den ikasketa prozesu baten esperimentazioa du helburu. Horretarako bi ataletan banatu da; alde batetik, egungo curriculumaren eta testu liburuen azterketa egin da, edukiei, ebaluazio irizpideei eta jarduerei erreparatuz, eta hauen artean sor daitezkeen hutsuneak identifikatzeko asmoz. Bigarrenean, berriz, ikasketa prozesuaren proposamena egin da, non ikasleen esplorazio prozesuari garrantzi berezia eman zaion eta ikasleek erakutsi ditzaketen jarrera, zailtasun eta oztopoak kontutan hartzeko hausnarketa egin den. Hau guztia aurrera eramateko asmoz, hainbat tresna diseinatu dira, geometriako software dinamikoan eredu dinamikoak eta paperean banatzeko galdetegi batzuk, hain zuzen ere. Honen ondoren, DBH4ko aniztasuneko klase batean egindako esperimentazioa eta bertatik ateratako ondorioak aurkeztu dira, ikasleek aurrera eramandako ariketa guztiak aztertuz. Amaitzeko, ondorio orokorrak aurkeztu dira eta aurrera begirako galdera ireki batzuk planteatu dira.

Hitz gakoak: Matematikaren didaktika, Ikuspegi Ontosemiotikoa, eredu-dinamikoa, triangelu zuzenak, trigonometria.

Resumen

Este Trabajo Fin de Master tiene como objetivo la experimentación de un proceso de estudio basado en el Enfoque Ontosemiotico (EOS). Para ello se ha dividido en dos partes; en la primera, se ha hecho un análisis tanto del currículo como de los libros de texto vigentes, teniendo en cuenta los contenidos, los criterios de evaluación y las diferentes actividades, para poder detectar posibles huecos entre unos y otros. En la segunda parte, en cambio, se ha hecho la propuesta del proceso de estudio, donde se ha hecho énfasis en el proceso de exploración del alumnado. También, se ha hecho una reflexión para poder prever las posibles dificultades, obstáculos y actitudes que podrían tomar los alumnos y alumnas. Para poder llevar todo esto a cabo, se han diseñado diversas herramientas, como modelos dinámicos de software de geometría dinámico y diversos cuestionarios para poder repartir en papel. Después de todo este proceso, se ha podido experimentar en un aula de 4º de ESO de diversificación, y se presentan todas las conclusiones que se han obtenido de este estudio. Para finalizar, se presentan las conclusiones generales y ciertas preguntas abiertas hacia el futuro.

Palabras clave: Didáctica de las Matemáticas, Enfoque Ontosemiotico, modelo dinámico, triángulo rectángulo, trigonometría.

Abstract

The aim of this Master's Thesis is the experimentation of a teaching process focused on the Onto-semiotic Approach (OSA). To this end, the project has been divided into two parts; in the first one, an analysis is done about the current curricula and text books, taking into account the contents, evaluation standards and the variety of activities, trying to detect gaps between them. In the second part, the proposal for the teaching process is done, putting an emphasis on the exploration process of the pupils. Besides, a reflexion is developed in order to anticipate the difficulties, obstacles and attitudes that the students could show. Some tools have been designed to carry out this project: dynamic models based on dynamic geometry software and questionnaires. After this process, a real experimentation was carried out in a High School, in the 4^{th} degree curricular diversification classroom, and the conclusions obtained are exposed. To conclude, general conclusions and open questions are given.

Key words: Mathematics Education, Onto-semiotic Approach, dynamic model, right-angled triangle, trigonometry.

Abstrait

Cette Mémoire de Fin de Master a pour objectif l'expérimentation d'un processus d'étude basé sur l'approche Ontosémiotique (AOS). A ce but, le travail a été divisé en deux parties; dans la première, une analyse du curriculum et des manuels scolaires en vigueur a été mené, ayant compte des contenus, des critères d'évaluation et des activités proposées, afin de détecter les possibles écarts des uns aux autres. Dans la deuxième partie, par contre, la proposition d'étude est présentée, où l'accent est mis sur le processus d'exploration des élèves. Une réflexion a été menée visant à prévoir les possibles difficultés, obstacles et attitudes que les élèves pourraient montrer. Pour tout mener à terme, de divers outils ont été désignés, comme des applets dans le software dynamique et de nombreux questionnaires à fournir en papier. Après tout ce procès, le projet a pu être expérimenté dans la classe de diversification de Seconde année, au une lycée. Toutes les conclusions y obtenues sont recueillies dans cette mémoire. Pour conclure, les conclusions générales sont présentées et certaines questions ouvertes posées.

Mot-clef: Didactique de la Mathématique, l'approche Ontosémiotique, software dynamique, triangle rectangle, trigonométrie.

Aurkibidea

Sarrera

Bigarren Hezkuntzako Unibertsitate Masterrak bi atal nagusi ditu. Alde batetik, alderdi psikopedagogikoak lantzen dituen bloke orokorra dago, eta bestetik, disziplina bakoitzari dagozkion moduluak daude. Master Bukaera Lan honek bi arlo horiek hartzen ditu abiapuntu, eta lotura nabarmenagoa du berariazko bigarren arloarekin, hots, matematikarekin, zeina hiru ataletan banatu den: matematikaren disziplinan berean sakontzeko modulua, modulu didaktikoa, eta azkenik, Practicum eta Master Bukaerako Lana barnebiltzen dituen modulua.

Horregatik, lan hau ez da isolatutako ariketa baten gisa ulertu behar, aldiz, ikasturte honetan zehar egindako masterreko ikaskuntza guztiekin batera ulertu behar da. Lan horretan sintetizatzen dira ikasturte osoan ikasitakoak, eta horrez gainera, ikaskuntza-irakaskuntza esperimentazio baten analisia egiten da.

Master Bukaerako Lan honetan triangelu zuzenen ebazpena aztertzen da DBHko 4. ikasmailan. Helburu nagusi hori lantzeko, lanean bi atal bereiziko dira. Lehenengo atalean, curriculumaren eta testu liburuen azterketa orokor bat egiten da, LHtik hasi eta Batxilergora arte, DBHri begirada berezia emanez. Bigarren zatian, triangelu zuzenen ebazpenari buruzko ikaskuntza-irakaskuntza prozesu bat proposatuko da, zeina DBH4ko aniztasuneko klase batean aurrera eraman den.

Prozesua Practicumaren markoaren barnean gauzatu da, eta esperimentazio horretan berariaz diseinaturiko materialak erabili dira, hala nola, eredu dinamikoak eta paperezko galdetegiak. Eskola liburuetan eta ikastetxeko materialetan oinarritu diren arren, galdetegi horiek *ad hoc* diseinatu dira eredu dinamiko baten laguntzarekin bideratzeko jarduera matematikoa. Galdetegi horietan bilduriko informazioa eta emaitzak aurkeztuko dira lehenik, eta horren ostean, aztertuko dira zenbait autorek proposatzen dituzten eduki teorikoak baliatuz.

Esperimentazioaren emaitzen azterketak aukera ematen du zenbait ondorio ateratzeko. Ondorio horiek hiru dimentsioren arabera antolatu dira, euren naturaren arabera: soziologikoak, pedagogikoak eta didaktikoak. Horietan guztietan, nabarmen ageriko da matematikako ikaskuntza-irakaskuntza antolatzeko dauden bi modu nagusien arteko alderaketa: alde batetik, ohiko testu liburuak erabiliz eta *imitaziozko* edo *erreprodukzio formaleko kontratu didaktikoa* erabiliz antolatzen den jarduera matematikoa, eta besterik, *esplorazio-ereduetan* oinarrituriko jarduera.

Sintesiaren eta ondorioen ostean, eta lana amaitzeko, erantzun gabeko zenbait galdera ireki planteatuko dira, etorkizuneko erronkak antolatzeko balioko dutelakoan.

Introducción

Este trabajo no hay que entenderlo como un trabajo aislado, hay que englobarlo en el master que se ha realizado durante este curso. Este master se ha dividido en dos partes principales, por un lado el ámbito psicopedagógico y por el otro el disciplinar. Este Trabajo Fin de Master toma como punto de partida estos dos ámbitos, pero tiene total relación con el segundo, es decir, con el matemático, que se ha dividido a su vez en tres partes: intensificación de la disciplina (matemáticas), el módulo didáctico y por último el modulo que abarca el Practicum y el Trabajo Fin de Master.

Por tanto, este Trabajo Fin de Master no hay que entenderlo como un trabajo aislado, hay que entenderlo del mismo modo que todas las otras nociones que se han ido adquiriendo durante este curso. En este trabajo se sintetiza lo que se ha aprendido durante este año, y además, se hace la experimentación de un proceso de enseñanza-aprendizaje.

Este trabajo toma como objetivo el análisis de la resolución de triángulos rectángulos en 4º de ESO. Para poder trabajar este objetivo principal se dividirá en dos partes. En la primera, se hará un análisis global desde el último ciclo de primaria hasta el Bachillerato, haciendo hincapié en la ESO, del currículo vigente y de los libros de texto. En la segunda en cambio, se propone un proceso de estudio sobre la resolución de los triángulos rectángulos, que se ha llevado a cabo en un aula de 4º de ESO de diversificación

El proceso se ha llevado a cabo dentro del marco del Practicum. Los materiales que se han utilizado en esta experimentación, así como los modelos dinámicos o los cuestionarios en papel. Aunque se hayan basado en los libros de texto y el material del centro han sido diseñados *ad hoc* con la ayuda de modelos-dinámico para poder dinamizar la actividad matemática. Primero se presentará la información y los resultados obtenidos, y después, se analizará teniendo en cuenta diversos contenidos teóricos que presentan algunos autores.

El análisis de los resultados de la experimentación ha dado pie a deducir ciertas conclusiones. Éstas se han organizado en tres dimensiones, dependiendo de su naturaleza: sociológicas, pedagógicas y didácticas. En todas ellas quedarán reflejados las dos formas de organización de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: por un lado, las actividades matemáticas que son *reproducciones formales del contrato didáctico*, y por otro, las que se basan en un *modelo de exploración.*

Después de las conclusiones, y para concluir con el trabajo, se plantearán ciertas preguntas abiertas, para que puedan servir para trabajos que se quieran llevar a cabo en el futuro.

I Atala: Matematikak egungo curriculumean eta testu liburuetan

Master Bukaerako Lanaren lehenengo zati honetan triangelu zuzenen ebazpena aztertzen da, alde batetik, egungo curriculum, eta bestetik, testu liburuetan. Azterketa LHko azkeneko zikloan hasten da, DBH osoan zehar jarraitzen du eta Batxilergoan amaitzen da. Analisi hori guztia lau kapituluetan banatuta agertuko da.

Lehenengo kapituluan, egungo curriculumean eta triangelu zuzenen ebazpenari erreferentzia egiten dioten edukiak adieraziko dira taula desberdinetan eta gradu bakoitzean. Eduki hauek sailkatu ahal izateko landuko den gaiarekin erlazioa duten deskriptoreak definitu dira, honela, ikasmaila desberdinetan egindako analisiek norabide berdina izanen dute. Analisi hau egiteko ez da curriculumean agertzen diren blokeen banaketa eginen. Hau da, orokorrean triangeluen ebazpenerako beharrezkoak diren eduki matematiko guztiak aztertuko dira, hala nola: aritmetikoak, aljebraikoak, geometrikoak, funtzionalak, estatistikoak, e.a.

Bigarren kapituluan, edukiekin egindako lanketa errepikatuko da, baina kasu honetan ebaluazio irizpideekin. Analisi hau egiteko, aurretik definitutako deskriptoreak kontutan harturik berri batzuk definitu dira, izan ere, ebaluazio irizpideen azterketa ez da edukiena bezalakoa izanen. Taulen formatu berdina erabiliko da, eta triangeluen ebazpenarekin erlazioa duten ebaluazio irizpide guztiak kontutan hartuko dira, bai zenbakiekin, aljebrarekin, funtzioekin, geometriarekin, e.a., guztiak beharrezkoak ikusten baitira triangeluen ebazpena landu ahal izateko.

Hirugarrenean, DBH4ko eta bi kurtso gorako eta beherako testu liburuetan agertzen diren jarduera moten (ariketak, problemak, galderak eta egoerak) adibideak aurkeztuko dira. Jarduerak, bi sailkapenen arabera aztertuko dira. Alde batetik, jarduera motaren arabera, ariketak, problemak, galderak edo egoerak izan daitezke. Bestetik, ikasketa prozesuaren zein faseetara bideratuta dauden zehaztuko da, esplorazio, trebatze edo sakontze fasera hain zuzen ere.

Bi iturrien (curriculuma eta testu liburuak) arteko konparazioa egitetik jasoko diren ondorioak laugarren kapituluan adieraziko dira. Egungo curriculumarekiko liburuek duten koherentzia baloratzea da helburu nagusiena eta aztertuko den gaiarekiko erlatiboak diren ezagutza matematikoen presentzia edo ausentzia gailentzea. Modu honetan, ikasketa prozesu baten diseinurako beharrezkoak diren aurreanalisi orokorrak egina egonen dira.

1. Kapitulua

Triangeluen ebazpena egungo curriculumean

Lehen Hezkuntzan, Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzan eta Batxilergoan geometriako edukiek bloke bereizi bat dute curriculumean (MEC 2006 eta MEC 2007). Lehen Hezkuntzako azkeneko ziklotik hasita, ikasmailaz ikasmaila, eta deskriptore konkretu batzuk definituz curriculumak eduki honetan dituen jarraikortasunak eta etenak identifikatuko dira. Lanketa hau interesgarria da eduki honen garapenaren ikuspuntu orokor bat izateko.

Curriculumaren azterketa sakona egiteko, honakoak dira definitu diren deskriptoreak, ikus 1. taula. Deskriptore hauek kurtso guztietarako erabiliko dira, kurtso desberdinetako curriculumaren analisia orokortzeko nahiarekin.

D1	Geometria laua eta espazialaren identifikazioa
D2	Geometria laua eta espazialaren eraikuntza
D3	Trigonometria
D4	Teknologia berrien erabilera
D5	Irudikapenak ardatz kartesiarretan
D6	Datuen trataera

1. taula: Curriculumaren azterketa egin ahal izateko erabiliko diren deskriptoreak.

Matematikaren lanketa integrala eta edukien interkonexioaren beharra argi eta garbi ikusten da. Egungo curriculumak aritmetika eta algebra beste hiru blokeetan lantzen dela argi adierazten duen arren, blokeen banaketa irmoa egiten du.

> "Gainerako edukiak bost multzotan banatu dira: Zenbakiak, Aljebra, Geometria, Funtzioak eta grafikoak, eta Estatistika eta probabilitatea. Esan beharra dago edukiak antolatzeko modu bat besterik ez dela hori. Helburua ez da izan konpartimentu itxiak sortzea: multzo guztietan zenbakizko teknikak eta teknika aljebraikoak erabiltzen dira eta haietako edozeinetan erabilgarria izan daiteke taula egitea, grafikoa sortzea edo probabilitate-ziurgabetasunezko egoera eragitea." (MEC, 2007, 75)

Gainera, konexioak oso garrantzitsuak dira. Matematika ez da ardatz tematiko edo estandarretan banatutako konjuntu bat, nahiz eta askotan horrela aurkezten diren. Matematika ikasketa eremu integratu bat da. Ikasleek ideia matematikoak erlazionatzen dituztenean, hauen ulermenean eta adimenean sakontzen da eta iraunkorragoak dira, eta matematika osotasun koherente baten moduan hauteman dezakete (NCTM, 2000).

Curriculuma sailkatutako blokeen arteko konexioei garrantzia emanez, hurrengo azterketan argi ikusiko den moduan, aipatutako bloke desberdinetako edukiak kontutan hartuko dira. Izan ere, geometriaren ebazpenerako beharrezkoak dira beste hainbat aspektu, aljebra eta aritmetika hain zuzen ere.

1.1. Lehen Hezkuntzako edukiak azkeneko zikloan

Triangeluen ebazpenaren lanketa DBHn izanen duen progresioa ulertzeko beharrezkoa da Lehen Hezkuntzako azken zikloan landutakoa aztertzea, ikus 2. taula.

Nahiz eta ebazpen metodoak ez diren oraindik ezagutzen, triangeluak osatzen dituzten objektuak identifikatzen hasten dira, angeluak eta puntuak adibidez. Eta ikasleek poligono hauen eraikuntzarako beharrezkoak diren erramintak erabiltzen hasi behar dira, hala nola, ardatz kartesiarrak eta beharrezkoak diren kalkulu eta zenbakiak.

Gainera, informazioa eta datuak antolatzeko erabiliko diren tresnak lantzen hasten dira, bai teknologia berriekin erlazioa dutenak eta paperean erabiliko direnak ere. Teknologia berrien erabilera ere lantzeko apustua egiten da Lehen Hezkuntzan.

	LHko hirugarren zikloko edukiak
D1	*<u>Geometria</u>* - Forma lauak eta espazialak: Forma geometrikoak deskribatu eta irudikatzen direnean zehaztasunez aritzeko interesa.
D2	*<u>Zenbakiak eta eragiketak</u>* - Osoko zenbakiak, hamartarrak eta zatikiak: Sei zifratik gorako zenbakien izena eta grafia egiazko egoeretan erabiltzea. Zenbaki positiboak eta negatiboak. Egiazko egoeretan erabiltzea. Zenbaki hamartarrak. Posizio balioak eta baliokidetasunak. Zenbaki hamartarrak eguneroko bizitzan erabiltzea. - Eragiketak: Berretura, faktore berdinen biderkadura gisa. Karratuak eta kuboak. Eragiketen hierarkia eta parentesiaren erabilera. *<u>Magnitudeen zenbatespena eta kalkulua</u>* - Luzera, pisua/masa, edukiera eta azalera Irudiak modu zehatzean eta hurbilduan neurtzeko estrategia pertsonalak garatzea. Neurketak egitea neurketarako tresna eta unitate konbentzionalak erabiliz.
D3	*<u>Magnitudeen zenbatespena eta kalkulua</u>* - Angeluen neurketa: Angelua, biraketa edo irekidura baten neurri gisa. Angeluen neurria eta angeluak neurtzeko tresna konbentzionalak erabiltzea. Neurketa eta neurriak erabiltzea problemak ebazteko eta informazioak ulertu eta helarazteko.
D4	*<u>Magnitudeen zenbatespena eta kalkulua</u>* - Angeluen neurketa: Neurketa tresnak eta erreminta teknologikoak arretaz eta zehaztasunez erabiltzeko interesa jartzea, bai eta unitate egokiak erabiltzeko ere. *<u>Geometria</u>* -Planoko eta espazioko kokapena, distantziak, angeluak eta biraketak: Marrazketako tresnak eta programa informatikoak erabiltzea forma geometrikoak eraiki eta aztertzeko.
D5	*<u>Geometria</u>* - Planoko eta espazioko kokapena, distantziak, angeluak eta biraketak: Angeluak posizio desberdinetan. Koordenatu kartesiarren sistema. Posizioak eta mugimenduak koordenatuen, distantzien, angeluen, biraketen eta abarren bidez deskribatzea. Espazioaren oinarrizko irudikapena, eskala eta grafiko errazak.
D6	*<u>Informazioaren tratamendua, ausa eta probabilitatea</u>* - Estatistikako grafiko eta parametroak: Grafikoak eta taulak ordenatuta eta argi prestatu eta aurkezteko joera.

2. taula: Lehen Hezkuntzako azken zikloko ikasmailei dagozkion deskriptoreak eta edukiak.

1.2. DBHko edukiak

DBHko lehenengo kurtsoan, ikasleek Lehen Hezkuntzan landutakoa sakonduko dute, ikus 3. taula. Alde batetik, poligonoen deskribapen soiletik triangelu eta laukien sailkapen eta identifikaziora pasako da. Bestetik, poligono hauen eraikuntzarako beharrezkoak diren zenbaki eta kalkuluak landuko dira, ardatz kartesiarrekin batera. Gainera, urte honetan aljebra lantzen hasten da. Honela, triangeluen eraikuntzarako beste tresna bat eskuragarri izanen dute.

Teknologia berrien erabilerari dagokionez, geometria lantzeaz gain (Lehen Hezkuntzako jarraipena izanen dena), zenbakizko kalkuluak eta kalkulu aljebraikoak egiteko ere erabiltzen hasiko dira.

	DBH1eko edukiak
D1	<u>*Geometria*</u> Irizpide desberdinetatik abiatuta, triangeluak eta laukiak sailkatzea. Poligono horietan zenbait propietate eta erlazio aztertzea. Poligono erregularrak. Formulen, triangelatzearen eta koadrikulazioaren bidez azalerak estimatu eta kalkulatzea. Perimetroak estimatu eta kalkulatu.
D2	<u>*Zenbakiak*</u> Zatikiak eta hamartarrak eguneroko inguruneetan. Zatikien esanahi eta erabilera desberdinak. Zatikien bidezko eragiketak: batuketa, kenketa, biderketa eta zatiketa. <u>*Aljebra*</u> Letrak erabiltzea hasiera batean ezezagunak diren zenbakiak eta zehaztu gabeko zenbakiak sinbolizatzeko. Sinboloen erabilgarritasuna, testuinguru desberdinetan kantitateak adierazteko. Formula sinpleetan zenbakizko balioak lortzea. <u>*Geometria*</u> Ohiko marrazketa-tresnekin poligono erregularrak eraikitzea
D3	<u>*Geometria*</u> Irudi lauetako angeluak neurtu eta kalkulatzea
D4	<u>*Guztientzako edukiak*</u> Tresna teknologikoak erabiltzea, zenbakizko kalkuluak, kalkulu aljebraikoak edo estatistikoak eta funtzio-adierazpenak egiteko eta propietate geometrikoak ulertzeko lagungarri gisa. <u>*Geometria*</u> Tresna informatikoak erabiltzea elementu geometrikoen arteko erlazioak eraiki, simulatu eta ikertzeko.
D5	<u>*Funtzioak eta grafikoak*</u> Koordenatu kartesiarrak. Ardatz koordenatuen sisteman puntuak irudikatzea. Puntuak identifikatzea koordenatuetatik abiatuta.
D6	<u>*Funtzioak eta grafikoak*</u> Datuak balio-tauletan antolatzea.

3. taula: DBH1 ikasmailari dagozkion deskriptoreak eta edukiak.

Bigarren kurtsoan, aurrekoan landutakoan sakonduko da, curriculuma espiral baten forma hartzen duelarik. Honela, ikasleek kalkulu konplexuagoak egiteko tresna gehiago ezagutzen hasten dira.

Bigarren maila honetan agertzen den puntu garrantzitsuetako bat problemen ebazpenerako aljebraren erabilera izanen litzateke, ikus 4. taula. Honela, beste alderdietan, geometrian adibidez, lantzen dituzten edukiak era sakonago batean aztertzeko gaitasuna izanen dute.

Gainera, geometria lauen eraikuntzarako (marrazketarako) baliagarriak izanen diren metodoak erabiltzeaz gain, metodo hauek curriculumean agertzen diren beste bloke batzuk ulertzeko kapazitatea ere emango diete. Honela bloke desberdinen arteko konexioak sortu ahal izateko. Matematika osotasun batean ulertzen hasteko pausua izanen da.

Bestalde, teknologia berrien erabilera eta datuen trataerari dagokienez, lanketa berdina egiten jarraituko da. Modu honetan, aurretik ikasitakoa sakondu baino, ezagutzak egonkortzeko balioko du.

Baina bi deskriptore (D3 eta D5, 1. taula) ez dira agertzen. Kurtso honetan aljebrari garrantzi handiena ematen zaion heinean, beste eduki batzuk alboratuta geratzen direlako.

	DBH2ko edukiak
D1	*<u>Geometria</u>* Gorputz geometrikoen bolumenak. Luzerak, azalerak eta bolumenak estimatu eta kalkulatu behar direneko problemak ebaztea.
D2	*<u>Zenbakiak</u>* Berbidura perfektuak. Erro karratuak. Erro hurbilduak estimatu eta lortzea. Proportzionaltasuna: zuzenekoa eta alderantzizkoa. Taulen analisia. Proportzionaltasun-arrazoia *<u>Aljebra</u>* Ekuazioak problemak ebazteko erabiltzea. Problema horiek berak ebaztea aljebraikoak ez diren metodoak erabiliz: saiakuntza eta errore gidatua. *<u>Geometria</u>* Irudiak nola handitu eta txikitu. Ahal izanez gero, erabilitako eskala-faktorea lortzea. Antzeko irudien azaleren arteko arrazoia. Thalesen eta Pitagorasen teoremak erabiltzea neurriak lortzeko eta irudien arteko erlazioak egiaztatzeko.
D4	*<u>Guztientzako edukiak</u>* Tresna teknologikoak erabiltzea, zenbakizko kalkuluak, kalkulu aljebraikoak edo estatistikoak eta funtzio-adierazpenak egiteko eta propietate geometrikoak ulertzeko lagungarri gisa. *<u>Estatistika eta probabilitatea</u>* Kalkulu orria erabiltzea datuak antolatu eta kalkuluak egiteko
D6	*<u>Estatistika eta probabilitatea</u>* Datuak tauletan antolatzea.

4. taula: DBH2 ikasmailari dagozkion deskriptoreak eta edukiak.

Hirugarren kurtso honetan ezagutzek jauzi kualitatibo bat dutela esan daiteke. Edukiak lantzeko modua aldatu eta ezagutza matematikoan sakontzen hasten da. Nozio abstraktuagoak agertzen hasten dira, errorea adibidez, ikus 5. taula.

Geometria lauaren eta espazialaren identifikazioari dagokionez, egin daitezkeen sailkaketa guztiak ezagutzen ditu ikasleak, beraz, “leku geometrikoa” deritzon nozio abstraktuan sakontzen hasiko da. Eraikuntzarako ordea, ikasleek tresna berriak bereganatzen jarraitzen dute, beti ere aurretik jasotako ezagutzekin lotura bat egitera bideratuta.

Baina bi deskriptore (D3 eta D6, ikus 1. taula) ez dira agertzen. Trigonometria eta datuen trataerari buruzko lanketarik ez da eginen. Lehenengoa DBH4n landuko da, eta bigarrena Estatistikarekin erlazio handia izan arren ez du lanketa handirik izanen DBHn zehar.

Derrigorrezko bigarren hezkuntzako laugarren eta azken kurtso honetan, matematika bi bidetan banatzen da (6. taula). A aukera edo giza eta gizarte zientzietara bideratuko den aukera, eta B aukera edo alderdi zientifiko eta teknologikora bideratuko dena.

	DBH3ko edukiak
D1	*Geometria* Propietate jakinetatik abiatuta irudiak zehaztea. Leku geometrikoa.
D2	*Zenbakiak* Zatiki eta hamartarren bidezko eragiketak. Kalkulu hurbildua eta biribiltzea. Zifra esanguratsuak. Errore absolutua eta erlatiboa. Eguneroko bizitzako problemak ebazteko hurbilketak eta biribiltzeak erabiltzea, egoerak eskatzen duen adinako zehaztasunarekin. *Aljebra* Ezezagun bakarra duten lehen eta bigarren mailako ekuazioak ebaztea. Bi ezezaguneko bi ekuazio linealek osatutako sistemak *Geometria* Thalesen eta Pitagorasen teoremak aplikatzea problema geometrikoak eta ingurune fisikoko problemak ebazteko.
D4	*Guztientzako edukiak* Tresna teknologikoak erabiltzea, zenbakizko kalkuluak, kalkulu aljebraikoak edo estatistikoak eta funtzio-adierazpenak egiteko eta propietate geometrikoak ulertzeko lagungarri gisa. *Estatistika eta probabilitatea* Kalkulagailua eta kalkulu orria erabiltzea datuak antolatu, kalkuluak egin eta grafiko egokienak sortzeko.
D5	*Funtzioak eta grafikoak* Zuzenaren ekuazioa irudikatzeko modu desberdinak erabiltzea.

5. taula: DBH3 ikasmailari dagozkion deskriptoreak eta edukiak.

Giza eta gizarte zientzietara bideratutako aukeran, geometriako blokeak curriculumean pisua galtzen hasten da. Beraz, ez da ezagutza berrietan sakonduko eta ez dira beste blokeetan ikasitako tresna berriak jadanik ezagunak diren jakintzetan aplikatuko. Aukera horretan beraz, trigonometriako edukiak ez dira lantzen, etorkizunean honekin erlazionatuta egonen diren edukiak ez direlako ibilbide honetan landuko, zenbaki konplexuak esaterako.

6. taulan ikusiko denez, ibilbide zientifikora orientatuta dagoen aukeran, geometriako blokeari, eta zehatzago triangeluen ebazpenari bestelako pisua emango zaio curriculumean. DBH3n hartutako kutsu matematiko abstraktua izaten jarraituko du. Aurreko ikasmailan lantzen hasitako edukietan sakonduko da eta kurtso honetan izanen da, lehen aipatu moduan, geometriak eta batez ere triangeluen ebazpena garrantzi handiagoa hartuko duenean.

Orokorrean bi modalitateetan geometria laua eta espazialaren identifikazioa ez du garrantzi handirik izanen, aurretik lanketa sakona izan duen edukia delarik. Gainera, ardatz kartesiarretan irudikapena eta datuen trataerari ere ez zaie garrantzi berezirik emango arrazoi berdinagatik.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">DBH4ko edukiak</td></tr>
<tr><td>A aukera</td><td>B aukera</td></tr>
<tr><td>D2</td><td><u>Zenbakiak</u>
Testuinguru desberdinetan zenbakiak eta eragiketak interpretatu eta erabiltzea eta kasu bakoitzean idazkera eta zehaztasun-maila egokienak hautatzea.
<u>Aljebra</u>
Letrazko adierazpenak erabiltzea formula eta ekuazioetako balioak lortzeko testuinguru desberdinetan.
<u>Geometria</u>
Triangeluen antzekotasuna eta Pitagorasen teorema aplikatzea neurriak zeharbidez lortzeko. Eguneroko bizitzan ohikoak diren problema geometrikoak ebaztea.</td><td><u>Zenbakiak</u>
Testuinguru desberdinetan zenbaki errealak interpretatu eta erabiltzea, kasu bakoitzerako idazkera eta hurbilketa egokienak hautaturik.
Erroak berretura moduan adieraztea. Errotzaile baliokideak. Errotzaileak alderatu eta sinplifikatzea.
Eragiketen hierarkia eta propietateak erabiltzea, berretzailea zenbaki osoa edo zatikia duten berreturekin eta erro sinpleekin kalkuluak egiteko.</td></tr>
<tr><td>D3</td><td>-</td><td><u>Geometria</u>
Arrazoi trigonometrikoak. Haien arteko harremana. Erlazio metrikoak triangeluetan
Ezagutza trigonometrikoak erabiltzea mundu fisikoko problema metrikoak ebazteko: luzera, azalera eta bolumena neurtzea</td></tr>
<tr><td>D4</td><td><u>Guztientzako edukiak</u>
Tresna teknologikoak erabiltzea, zenbakizko kalkuluak, kalkulu aljebraikoak edo estatistikoak eta funtzio-adierazpenak egiteko eta propietate geometrikoak ulertzeko lagungarri gisa.
<u>Zenbakiak</u>
Kalkulu orria erabiltzea eguneroko arazoekin eta finantza-arazoekin zerikusia duten problemak ebazteko kalkuluen antolaketan.
<u>Aljebra</u>
Beste ekuazio mota batzuk ebaztea saiakuntza eta erroreen sistemaren bidez edo metodo grafikoetatik abiatuta, bitarteko teknologikoak erabiliz.</td><td><u>Guztientzako edukiak</u>
Tresna teknologikoak erabiltzea, zenbakizko kalkuluak, kalkulu aljebraikoak edo estatistikoak eta funtzio-adierazpenak egiteko eta propietate geometrikoak ulertzeko lagungarri gisa.
<u>Aljebra</u>
Beste ekuazio mota batzuk ebaztea saiakuntza eta erroreen sistemaren bidez edo metodo grafikoetatik abiatuta, bitarteko teknologikoak erabiliz.</td></tr>
</table>

6. taula: DBH4 ikasmailako A eta B aukerei, dagozkien deskriptoreak eta edukiak.

1.3. Batxilergoko edukiak

Bigarren Hezkuntzako azkeneko bi kurtsoetan DBH4n hasitako banaketa jarraitzen da. Zientzia eta teknologien modalitatea alde batetik eta giza eta gizarte zientzietara bideratuko dena bestetik. Bi kasuetan matematika landuko da, baina bi modu desberdinetan, helburuak ez dira berdinak izanen, ondorioz edukia ere ez.

Bi kasuetan argi eta garbi ikusten da geometriaren blokearen bazterketa eta analisiaren gailentzea.

Ibilbide zientifikora bideratutako batxilergoan triangeluen lanketa ematen dela ikus daiteke, ikus 7. taula. Baina ezagutza beran ez da sakontze prozesurik egonen, ariketa eta problemen ebazpenean oinarrituko baita, 35. orrialdean ikus daiteke.

Curriculumeko beste blokean landutako tresnak eta metodoak ez dira arlo honetan aplikatuko, horregatik taulan ez dira deskriptore gehienak agertuko. Batxilergo zientifikoan geometriaren lanketa ingeniaritzetara bideratutako modalitatean Marrazketa Teknikoko ikasgaian sakonago landuko da.

	Zientzia eta teknologia modalitateko edukiak	
	I	II
D2	*<u>Aritmetika eta Aljebra</u>* Aljebrako tresnak problemak ebazteko erabiltzea.	-
D3	*<u>Geometria</u>* Angelu baten neurria radianetan. Angelu baten arrazoi trigonometrikoak. Formula eta eraldaketa trigonometrikoak erabiltzea triangeluen ebazpenean eta askotariko problema geometrikoetan.	*<u>Geometria</u>* Angeluen, distantzien, azaleren eta bolumenen kalkuluarekin zerikusia duten problema metrikoak ebaztea.

7. taula: Zientzia eta teknologia modalitateko Batxilergoko 1. eta 2. ikasmailei dagozkion deskriptoreak eta edukiak.

Gizarte zientzietara bideratutako batxilergoan, aztertuko den gaiarekin erlazioa duen edukirik ez da aurkitu. Triangeluen eta trigonometriaren afera, zientzietako ikasketekin erlazionatzen baita, eta batxilergoko modalitate hau hautatzerakoan ikasleek bide hori baztertzen dute. Bazterketa esaten denean, DBH4tik geometria ez dela landuko argi ikus daiteke 6. taulan.

2. Kapitulua

Ebaluazio irizpideak egungo curriculumean

Aurreko Kapituluan egin den moduan, Lehen Hezkuntzatik hasita Batxilergoa arte aztertuko dira curriculumean zehaztuta agertzen diren ebaluazio irizpideak. Horretarako aurreko atalean erabili diren erreferentzia berdinak kontutan hartuko dira.

Era berean, deskriptoreak erabiliko dira azterketa hau egiteko ikus 8. taula. Nahiz eta edukiekin erlazioa mantentzen duten ez dira deskriptore berdinak erabiliko. Ebaluatzeko garaian beste hainbat aspektu kontutan hartzea ere beharrezkoa ikusten delako. Zeharkako komunikazio konpetentzia hala nola.

E1	Geometria laua eta espazialaren eraikuntza
E2	Trigonometria
E3	Idatzizko informazioaren komunikazioa
E4	Datuen trataera eta komunikazioa (grafikoki eta taulak erabiliz)

8. taula: Curriculumaren azterketa egin ahal izateko erabiliko diren deskriptoreak.

Aurreko kapituluaren hasieran, ikus 13. orrialdean, aipatu den moduan, kontutan hartuko da blokeen arteko konexioa. Edukietan konexio horiek kontutan hartzen dira, beraz, ebaluazio irizpideetan ere. Honela, argi ikus daiteke badirela eduki batzuk transbertsalki landu daitezkeenak, (Lasa, 2016, 9-15). Hau da, edukien lanketa beste modu batean egin daitekeela, curriculumean agertzen diren eduki eta ebaluazio irizpideak erabilita.

2.1. Ebaluazio irizpideak Lehen Hezkuntzako azken zikloan

Lehen Hezkuntzako azken zikloko ebaluazio irizpideek duten ezaugarririk markatuena deskriptore bat baino gehiagorako baliagarriak direla da. Hau da, edukia ebaluatzeaz gain, zeharkako konpetentziak ere kontutan hartzen direla ebaluatzerako orduan. 9. taulan (22.orrialdea) ikus daitekeen moduan, E3 deskriptorearen zeharkako kutsua.

Azken bi kurtso hauetan geometria laua eta espazialerako eraikuntzarako beharrezkoak izanen diren edukien ebaluaketa eginen da. Lehen aipatu den moduan, eduki oinarrizkoak direnez, ikasleek barneratu dituztela ziurtatzeko balioko dute ebaluazio irizpide hauek. Ikasleek oinarri sendo baten gainean haien ezagutzak eraiki ahal izateko. Baina, ez da trigonometriarekin erlazionatutako ebaluazio irizpiderik egonen.

Ideia eta nozio matematikoen komunikatzeko gaitasunari ere garrantzia emanen zaio. Modu honetan, ikasleak nerabezaroan sartzen doazen heinean pentsaera formalaren oinarriak finkatzen has daitezen.

	LHko azken zikloko ebaluazio irizpideak
E1	1: Zenbaki mota desberdinak (arruntak, osokoak, zatikiak eta hamartarrak ehundarrak arte) irakurri, idatzi eta ordenatzea, arrazoitze egokiak eginez. Irizpide honen bidez egiaztatu nahi da egiazko egoeretan zenbaki mota desberdinak nola erabiltzen dituzten, horien balioa interpretatuz eta modu desberdinetan idatzitako zenbakiak konparatuz. 2: Zenbakizko eragiketa eta kalkulu errazak eragiketen propietateei erreferentzia egiten dieten prozedura desberdinen bidez egitea, buruz egiteko kalkulua barne, problemak ebazteko egoeretan. 3: Zenbaki hamartarrak, zatikiak eta portzentaje errazak erabiltzea honekin egiaztatuko da zenbaki mota desberdinak egiazko egoeretan erabiltzen dituzten, horien artean baliokidetasunak ezarriz, eta problemen interpretazio eta ebazpenean eragile gisa identifikatu eta erabiltzeko gai diren. 4: Egiazko egoeretan, neurketarako ohiko tresnen eta unitateen artean egokienak hautatzea, aurretik zenbatespenak eginez. Ikusi nahi da gai ote diren neurketarako ohiko unitateak zuzen erabiltzeko. 5: Nozio geometrikoak erabiltzea eguneroko bizitzako egoerak deskribatu eta ulertzeko.
E3	4: Halaber, arrazoitzeak ahoz eta idatziz eta geroz eta autonomia handiagoaz azaltzeko gaitasuna baloratuko da. 5: Ikusi behar da ikasleek nozio horiek ikasi dituzten eta horiei dagozkien hitzak informazioa eman eta eskatzeko erabiltzen dakiten. 8: Problema errazak ebatzi behar direnean, arrazoizko soluzio bat aurretik ematea eta ebazpen prozesurako egokienak diren prozedura matematikoak bilatzea. Estrategia desberdinak baloratzea eta datu eta soluzio zehatzak bilatzen ahalegintzea, bai problemaren formulazioan bai ebazpenean. Irizpide honen helburua, bereziki, testu matematikoak ulertzen diren ebaluatzea da, bai eta problemak ebazteko gaitasuna ere, jarraitutako prozesua kontuan hartuta.
E4	7: Ingurune hurbilari buruzko datu multzo bat irakurri eta interpretatzea. Irizpide honekin egiaztatu nahi da informazio zenbakarria bildu eta erregistratzeko gaitasuna: datuen taulak. Hala adierazitako informazioa ulertu eta emateko gaitasuna.

9. taula: Lehen Hezkuntzako azken zikloko ikasmailei dagozkion deskriptoreak eta ebaluazio irizpideak.

2.2. Ebaluazio irizpideak DBHn

DBH1n, aurreko kurtsoetan ikasitakoa oinarri hartuta, ezagutza hauen aplikazioak ebaluatuko dira.

Argi ikus daiteke, 9. taula eta 10. taulari erreparatzen bazaie, lehenengo puntuan. LHko azkeneko zikloan, zenbaki desberdinen irakurketa, idaztea eta ordenatzea ebaluatuko da, eta DBHko 1go mailan ordea, zenbaki horien bidezko eragiketak eta propietateak erabiltzea. Beraz, hor ikus daiteke lehenengo jauzia zein den.

Problemen ebazpenari dagokionez, kurtso guztietan emanen zaio garrantzia, azken finean, matematikak egunerokotasunean aplikatzean datza. Baina, DBHn emaitzaren esanahiari garrantzia ematen hasten zaio, ikasleek ulertu dezaten zergatik jartzen duten emaitza eta zentzurik duen hausnartu.

Idatzizko informazioaren inguruan lanketa sakona egiten hasten da. Irudi geometrikoekin batez ere, hizkera matematikoa (zuzena, zirkunferentzia…) barneratu ditzaten eta baita problemen ebazpenaren prozedurarekin ere. LHren ebaluazio irizpideei jarraikortasuna emanez, datuen trataeran ere sakonduko da. Taulen erabileran batez ere.

	DBH1ko ebaluazio irizpideak
E1	1: Zenbaki natural eta osoak eta zatiki nahiz hamartar errazak, horien bidezko eragiketak eta horien propietateak erabiltzea informazioa bildu, eraldatu eta trukatzeko. Egiaztatu behar da ikasleak gai diren zenbakiak eta eragiketak identifikatu eta erabiltzeko, zenbakiak behar bezala erabiltzen dituzten informazioak transmititzeko. Arreta berezia jarriko zaio, kasu errazetan, eragiketa konbinatuak erabiltzeko gaitasunari. 2: Problemak ebaztea lau eragiketen bidez, zenbaki osoekin, hamartarrekin eta zatikiekin, kalkulu mota egokia erabiliz eta emaitza testuinguruari noraino egokitzen zaion baloratuz. Baloratu nahi da ea ikasleak gai diren eragiketa desberdinei esanahi berriak esleitzeko eta egoera bakoitzerako kalkulu mota egokiena hautatzeko. Egiaztatu nahi da ikasleek ez dutela emaitza besterik gabe ontzat ematen, aitzitik, abiapuntuko egoerarekin erkatzen dutela.
E2	5: Irudi lauen perimetroak, azalerak eta angeluak estimatu eta kalkulatzea neurketa-unitate egokia erabiliz. Metodo desberdinak erabiliz irudi lauen neurri batzuk.
E3	4: Irudi lauak bereizi eta deskribatzea, beren propietateen arabera sailkatzea eta lortutako ezagutza geometrikoa aplikatzea mundu fisikoa interpretatu eta deskribatzeko, termino egokiak erabiliz. Geometriaren oinarrizko kontzeptuak erabiltzeko gaitasuna baduten egiaztatu nahi da. 8: Problemak ebazteko estrategia eta teknika errazak erabiltzea, hala nola enuntziatuaren analisia, saiakuntza eta errorea edo problema errazago baten ebazpena; lortutako soluzioa egiaztatzea, eta ebazpenerako erabili den prozedura azaltzea, ikaslearen mailarako hizkuntza matematiko egokia erabiliz. Ebaluatu egin behar dira ebazpenak bilatzeko jarraikitasuna, nork bere buruarengan soluzioa lortzeko konfiantza izatea, eta garatutako ideia eta prozesu pertsonalak hitz egokiez transmititzeko gaitasuna, ikaskideek uler ditzaten. Truke jarduera hori egiteko jarrera positiboa izatea ere kontuan hartuko da.
E4	6: Taulak erabiliz askotariko informazioak antolatu eta interpretatzea, eta mendekotasun erlazioak identifikatzea eguneroko egoeretan. Irizpide honen bidez baloratu nahi da ea ikasleak gai diren eguneroko egoera batean esku hartzen duten aldagaiak eta haien arteko mendekotasun erlazioa zehazteko. Gainera, taulen erabilera ebaluatu nahi da, informazioa biltzeko eta ardatz koordenatuetara transferitzeko tresnak diren aldetik.

10. taula: DBH1 ikasmailari dagozkion deskriptoreak eta ebaluazio irizpideak.

Bigarren ikasturtean ikus daitekeen aldaketarik handiena, ikus 11. taula, edukien azterketan aipatu den moduan, aljebrari lotutakoa da. Eduki berriak sartzen direnez, ebaluaketa ere moldatu beharko da. Problemen ebazpenari lotuta agertzen da batez ere. Beste deskriptoreei dagokienez, antzeko ebaluazioa burutuko da nahiz eta edukiekin aurrera egiten den.

Trigonometriaren kasuan, erlazionatutako edukirik agertzen ez denez, ikus 4. taula 16.orrialdean, ez da deskriptore honekin erlazionatutako ebaluazio irizpiderik agertuko.

	DBH2ko ebaluazio irizpideak
E1	1: Zenbaki oso, zatiki, hamartar eta ehuneko errazak erabiltzea, baita haien eragiketak eta propietateak ere, informazioa bildu, eraldatu eta trukatzeko eta eguneroko bizitzarekin zerikusia duten arazoak ebazteko. Egiaztatu behar da kalkulu modurik egokiena hautatzen duten (buruzkoa, idatzizkoa edo kalkulagailu bidezkoa) eta lortutako emaitzen koherentzia eta zehaztasuna kalkulatzeko gai diren. Kalkuluak askotariko testuinguruetan aplikatzeko gaitasuna ebaluatzeari arreta berezia jarri behar zaio. 3: Problemei ekiteko beste tresna batzuk bezala, hizkuntza aljebraikoa ere erabiltzea lehen mailako ekuazioak sinbolizatu eta orokortzeko, planteatzeko eta ebazteko. Egiaztatu nahi da ikasleak gai diren hizkuntza aljebraikoa erabiliz propietate errazak orokortzeko eta erlazioak sinbolizatzeko. Gainera, lehen mailako ekuazioak planteatu behar dituzte. Halaber, ebaluatu nahi da ea ikasleak gai diren aljebraren ordez estrategia pertsonalak baliatzeko problemak planteatu eta ebazteko orduan. Era berean kontuan hartu behar da emaitzen koherentzia.
E3	7: Irizpide honen bidez ebaluatu nahi da nola ekiten dioten ikasleek soluzioa lortzeko prozedura estandarrik ez dagoenean. Hainbat alderdi ebaluatuko dira: ea enuntziatua ulertzen den testuaren zati bakoitzaren azterketaren eta alderdi nagusienen identifikazioren bitartez. Garatutako ideia eta prozesu pertsonalak hitz nahiko zehatzez transmititzeko gaitasuna. Jarrera positiboa izatea ere kontuan hartuko da.
E4	5: Tauletatik balioak lortzea eta aztertutako fenomenoari buruzko ondorioak ateratzea. Irizpide honen bidez baloratu nahi da nola erabiltzen diren informazioa aurkezteko modu desberdinak.

11. taula: DBH2 ikasmailari dagozkion deskriptoreak eta ebaluazio irizpideak.

Hirugarren ikasturtean ziklo aldaketa ematen da eta edukietan, ikus 5. taula 17.orrialdean, aurrerapauso bat ikusi dugun arren, ebaluazio irizpideak orokortasunean daude oinarrituta.

	DBH3ko ebaluazio irizpideak
E1	1: Zenbaki arrazionalak, haien eragiketak eta haien propietateak erabiltzea informazioa bildu, eraldatu eta trukatzeko eta eguneroko bizitzarekin zerikusia duten arazoak ebazteko. Egiaztatu behar da ikasleak gai diren zenbakiak eta eragiketak identifikatu eta erabiltzeko, haien esanahiaz eta propietateez jabetzen diren, eta lortutako emaitzen koherentzia eta zehaztasuna kalkulatzeko gai diren. Halaber, garrantzitsua da, planteatutako egoera kontuan hartuta, zenbakiak modu egokian adieraztea: zenbaki hamartarra, zatikia edo notazio zientifikoa. Maila honetan planteatu behar diren problemetan oso garrantzitsua eskatutako zehaztasunera biribiltzea eta hori egitean izandako akatsa baloratzea ere. 2: Emandako propietate edo erlazio bat hizkuntza aljebraikoaren bidez adieraztea, eraketa-legea eta dagokion formula lortuz, kasu errazetan. Irizpide honen bidez egiaztatu nahi da ikasleek fenomeno batetik informazio garrantzitsua ateratzeko eta adierazpen aljebraiko bihurtzeko gaitasuna duten. 3: Eguneroko bizitzako arazoak ebaztea, lehen edo bigarren mailako ekuazioak edo bi ezezagun dituzten ekuazio linealen sistemak planteatu eta ebatzi behar diren kasuetan. Irizpide honen bidez egiaztatu nahi da ikasleek dakiten letrazko adierazpideak manipulatzeko teknikak erabiltzen, ebatzi aurretik ekuazio eta sistemetara bihurtzen ahal diren problemak ebazteko.
E3	8: Problemak ebazteko estrategiak eta teknikak planifikatu eta erabiltzea, hala nola zenbaketa zehatza, indukzioa edo antzeko problemen bilaketa, eta egiaztatzea soluzioa bat datorrela planteatutako egoerarekin, eta ahoz nahiz idatziz adieraztea, zehaztasunez.
E4	6: Informazio estatistikoak landu eta interpretatzea, erabiltzen diren taulen egokitasuna kontuan hartuta. Baloratu nahi da ea ikasleak gai diren informazioa ongien aurkeztuko duen taula edo grafikoa hautatzen.

12. Taula: DBH3 ikasmailari dagozkion deskriptoreak eta ebaluazio irizpideak.

Zenbakien erabilerari dagokionez, zenbaki mota berriak ikasten diren heinean, ebaluazio irizpideak horiei lotuta doaz. Baina, azken finean, zenbaki mota desberdinak erabiltzen eta manipulatzen jakitean datza. Bestalde, problemen ebazpenean sakontzen jarraitzen da aljebraren nozioekin bateratuz, beti ere emaitzaren koherentzia ulertuz.

Informazioaren komunikazioari dagokionez, idatzizko komunikazioa ebaluatzeko garaian problemak ebazteko prozeduran oinarrituko da. Datuen trataerari dagokionean ordea, taulen erabilera eta egokitasunari.

Kurtso honetan ere, aurrekoan gertatu den moduan, trigonometria ez denez edukietan agertuko, ebaluazio irizpiderik ez da egonen.

DBH4n, bereizketa bat eginen da aurreko kapituluan ikusiko den moduan. Alde batetik Giza eta Gizarte zientzietara bideratutako ebaluazio irizpideak egonen dira (A aukera) eta bestetik, Zientzia eta Teknologia modalitatera bideratutakoak (B aukera), ikus 13. taula 26.orrian.

Ulergarria den moduan, badaude komunak diren ebaluazio irizpide batzuk. Bi aukeretan geometria laua eta espazialaren eraikuntzari dagozkion bi puntu errepikatzen dira, lehenengo puntua bi aukerentzako eta hirugarren puntua, A aukeran eta bigarren puntua B aukeran. Edukien sakontasunean aldea egon arren ebaluazio irizpideak berdinak dira. Berdina gertatuko litzateke idatzizko informazioaren komunikazioari dagokion ebaluazio irizpideari.

Datuen trataerari dagokionez, desberdin ebaluatuko dira, edukien lanketa desberdina delako. Hau da, A aukeran, Estatistikaren blokeari lotutako edukiak ebaluatuko dira, eta B aukeran ordea Funtzioen analisiari lotutakoak. Beraz, ebaluazio irizpide desberdinak erabiliko dira.

B aukerari dagokionez, trigonometria ebaluatzeko irizpiderik ez dagoela ikus daiteke, nahiz eta edukiei erreparatuz, 6. taula 18.orrialdean, eduki dezente lantzen direla ikusi. Honek, ebaluazio irizpideen orokortasuna agerian uzten du.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><th colspan="2">DBH4ko ebaluazio irizpideak[1]</th></tr>
<tr><th>A aukera</th><th>B aukera</th></tr>
<tr><td rowspan="2">E1</td><td colspan="2">1: Mota guztietako zenbaki eta eragiketak eta haien propietateak erabiltzea informazioa bildu, eraldatu eta trukatzeko eta eguneroko bizitzarekin eta eremu akademikoko beste gai batzuekin zerikusia duten arazoak ebazteko. Egiaztatu behar da ikasleak gai diren zenbaki mota guztiak eta eragiketak identifikatu eta erabiltzeko, haien esanahiaz eta propietateez jabetzen diren, kalkulu modurik egokiena hautatzen duten (buruzkoa, idatzizkoa edo kalkulagailu bidezkoa) eta lortutako emaitzen koherentzia eta zehaztasuna kalkulatzeko gai diren. Maila honetan bereziki garrantzitsua da begiratzea ea ikasleak gai ote diren soluzioa (zehatza edo hurbildua) probleman eskatzen zaien zehaztasunari egokitzeko, batez ere berretura, erro edo zatikiekin lan egiten dutenean.
3[2]: Egiazko egoeretan zuzeneko eta zeharkako neurriak lortzeko tresna, formula eta teknika egokiak erabiltzea. Egiaztatu nahi da ikasleek estrategia egokiak garatu ote dituzten magnitude ezagunetatik abiatuta magnitude ezezagunak kalkulatzeko, eskura dituzten neurketa tresnak erabiltzeko, formula egokiak aplikatzeko eta proposaturiko neurketari dagozkion teknika eta trebetasunak garatzeko.</td></tr>
<tr><td>3: Eguneroko bizitzako arazoak ebaztea, lehen edo bigarren mailako ekuazioak edo bi ezezagun dituzten ekuazio linealen sistemak planteatu eta ebatzi behar diren kasuetan. Irizpide honen bidez egiaztatu nahi da ikasleek dakiten letrazko adierazpideak manipulatzeko teknikak erabiltzen, ebatzi aurretik ekuazio eta sistemetara bihurtzen ahal diren problemak ebazteko.</td><td>2: Egoerak eta egitura matematikoak adierazi eta aztertzea, ikur eta metodo aljebraikoak erabiliz, problemak ebazteko. Irizpide honen bidez egiaztatu behar da ikasleak gai diren aljebra sinbolikoaren bidez erlazio matematikoak adierazi eta azaltzeko eta aljebra sinbolikoaren metodoak erabiltzeko problemen ebazpenean, inekuazio, ekuazio eta sistemen bitartez.</td></tr>
<tr><td>E3</td><td colspan="2">7[3]: Problemak ebazteko arrazoitze-prozesu eta estrategiak planifikatu eta erabiltzea (adibidez, hipotesiak eman eta justifikatzea, edo orokortzea), eta arrazoibideak, erlazio kuantitatiboak eta elementu matematikoak dituzten informazioak ahoz nahiz idatziz adieraztea, zehaztasun eta zorroztasunez. Aintzat hartuko da kantitateak, neurriak, zenbakizko erlazioak edo erlazio espazialak dituzten mota guztietako informazioak adierazteko erabiltzen den hizkuntzaren zehaztasuna eta zorroztasuna, baita problema ebazteko erabiltzen diren estrategiak eta arrazoibideak ere.</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>6: taula bateko zenbakizko balioen portaera ikusirik, aztergai den fenomenoari buruzko ondorioak ateratzeko gaitasuna baloratuko da
7: Taulak osatu eta interpretatzea. Informazio estatistikoa tauletan eta grafikoetan antolatzeko gaitasuna.</td><td>4: Zentzuzko ondorioak ateratzeko hari lotutako egoeratik; azterketa hori egiteko informazioaren teknologiak erabili behar dituzte, behar izanez gero. Gainera, grafiko baten edo taula bateko zenbakizko balioen portaera ikusirik, aztergai den fenomenoari buruzko ondorioak ateratzeko gaitasuna baloratuko da.
5: Taulak osatu eta interpretatzea.</td></tr>
</table>

13. taula: DBH4 ikasmailako A eta B aukerei, dagozkien deskriptoreak eta ebaluazio irizpideak.

[1] Puntuak definitzean, B aukerako identifikazioa hartuko da kontutan. Ebaluazio irizpide batzuk ez dira guztiz berdinak, baina bi modalitateetakoak hain antzekoak izanik berdinak izango balira bezala hartu dira.

[2] A aukeran 4.puntua izango litzateke.

[3] A aukeran 9.puntua izango litzateke.

2.3. Ebaluazio irizpideak Batxilergoan

Giza eta gizarte zientzien modalitatean ez da aztertuko den eduki konkretuaren lanketa egiten, ondorioz, ez dago honekin erlaziorik duen ebaluazio irizpiderik. Beraz, zuzenean Zientzia eta teknologia modalitatea aztertuko da.

Zientzia eta teknologia modalitatean ebaluazio irizpideen konkrezioa handiagotzen doala ikus daiteke, ikus 14. taula, beti edukien konkrezioaren armonia berean.

Lehenengo kurtsoan, aipatu daitekeen punturik esanguratsuena datuen trataerari buruzkoa izango litzateke. Deskriptore honek erlazio zuzena dauka estatistikako edukiekin eta modalitate honetan eduki hauek alboratzen dira eta beraz, baliagarriak izan ahal diren beste ebaluazio irizpide batzuk ere.

Bestalde, tresna berriak ematen dira triangeluen ebazpena ahalbideratzeko eta horregatik ebaluazio irizpide ugari agertzen dira deskriptore honekin erlazionatuta, baina oso gutxitan curriculumeko geometriako blokearekin.

	Zientzia eta teknologia modalitateko ebaluazio irizpideak
	I
E1	1: Zenbaki errealak eta haien arteko eragiketak zuzen erabiltzea informazioa aurkeztu eta trukatzeko, errealitate sozialetik eta naturatik ateratako problemak ebaztea ekuazioak eta inekuazioak erabiliz, eta lortutako emaitzak interpretatzea. Irizpide honen bidez egiaztatu nahi da ea ikasleek zenbaki errealak erabiltzeko behar diren trebetasunak hartu dituzten, egoera bakoitzerako idazkera, hurbilketa eta errore-borne egokiak hautatzeko gaitasuna barne. Halaber, ebaluatu nahi da zenbateraino ulertzen dituzten zenbakien propietateak, eragiketen efektua, balio absolutua eta horren aplikazio posiblea. Baloratu behar da, gainera, zenbateko gaitasuna duten egoera bat aljebraikoki itzultzeko, haren ebazpenera iristeko eta lortutako emaitzen interpretazioa egiteko. 2: Beren egiazko testuinguruan baloratuz eta interpretatuz; planoko zenbait leku geometrikori dagozkien formak identifikatzea, haien propietate metrikoak aztertzea eta horietatik abiatuta haiek eraikitzea.
E2	2: Egiazko egoera baten eskema geometrikoa egitea eta triangeluak ebazteko teknika desberdinak erabiltzea ondorioak adierazteko. Ebaluatu nahi da zenbateko gaitasuna duten aurkezten zaien egoera geometrikoki adierazteko, aurkitutako soluzioak interpretatzea ahalbidetzen duten definizio eta transformazio geometrikoak zuzen hautatuz eta aplikatuz.
E3	8: Ikerketak egitea, zeinetan informazioak antolatu eta kodetu eta estrategiak hautatu, alderatu eta baloratu behar diren, egoera berriei eraginkortasunez ekiteko, kasuan kasuko tresna matematiko egokiak aukeratuz. Egoera aztertu ondoren, eredua egin behar dute, eta egokiro hausnartu eta arrazoitu

14. taula: Zientzia eta teknologia modalitateko Batxilergoko 1. ikasmailari dagozkion deskriptoreak eta ebaluazio irizpideak.

Bigarren mailan antzeko egoera bat gertatzen da, ikus 15. taula. Datuen trataerari dagokionez, curriculumean hau zehaztean analisia eta funtzioen edukiekin erlazioa daukaten ebaluazio irizpideak agertuko dira. Bestalde, trigonometriari dagokionez, ez da ebaluazio irizpide zehatzik agertuko, baina bai beste eduki batzuetan transbersalki landuko denez, ebaluazio irizpideak ere ez dira deskriptore honekin zehazki lotuta egonen.

	Zientzia eta teknologia modalitateko ebaluazio irizpideak
	II
E1	2: Geometriako egoerak hiru dimentsioko hizkuntza bektorial batera transkribatzea, bektoreen arteko eragiketak erabiltzea haietatik ateratako problemak ebazteko eta soluzioen interpretazioa ematea. Irizpide honen xedea da hiru dimentsioko espazioko objektu geometrikoekin hurrenez hurreneko eraldaketak egiteko gaitasuna baloratzea.
E3	7: Ikerketak egitea, zeinetan informazioak antolatu eta kodetu eta estrategiak hautatu, alderatu eta baloratu behar diren, egoera berriei eraginkortasunez ekiteko, kasuan kasuko tresna matematiko egokiak aukeratuz. Egoera aztertu ondoren, eredua egin behar dute, eta egokiro hausnartu eta arrazoitu
E4	3: Problema errealak lengoaia grafiko edo aljebraikoan ematea, kasu bakoitzean egokiak diren kontzeptu, propietate eta teknika matematikoak erabiltzea problema horiek ebazteko, eta lortutako soluzioei buruzko interpretazioa ematea, testuinguruari lotuta. Ebaluatu nahi da ea ikasleak gai diren problema bat hizkuntza aljebraiko edo grafikoan adierazteko prozedura egokien bidez hura ebazteko eta lortutako soluzioa modu kritikoan interpretatzeko. Aljebran, geometrian eta analisian eskuratutako tresnak hautatu, erabili eta egokiro konbinatzeko gaitasuna ebaluatu behar da.

15. taula: Zientzia eta teknologia modalitateko Batxilergoko 2. ikasmailari dagozkion deskriptoreak eta ebaluazio irizpideak.

3. Kapitulua

Ariketak, problemak, galdera eta egoera motak testu liburuetan eta triangelu zuzenen ebazpenarekin duten erlazioa

DBH2tik hasita Batxilergoko azkeneko ikasturte bitarteko jarduerak aztertuko dira. Horretarako ariketa, problema, galdera eta egoera zer den definituko da.

Ariketak, teknika jakin batean trebatzeko jarduerak dira. Errepikakorrak eta motzak. *Problemak* ordea, ariketetan landutako hainbat teknika desberdin erabiltzen dira prozedura konplexuago batean. Aurreko kapituluan ikusi den moduan, problemak ebazterakoan hizkera desberdinak erabili behar dira, naturala, aljebraikoa, grafikoa, geometrikoa, e.a. *Galderak* ordea, matematikaren alde teorikoa lantzeko balio dute, frogapenak eta formulen arteko loturak batez ere. Normalean erantzunak ez dira zenbakiekin adierazten. *Egoerak*, azkenik, hainbat jarraibideetan eta eginbeharretan oinarritutako dinamika da. Ez da galdera zehatz bat eta bi fasetan banatuta agertu ohi da. Lehena, fase *adidaktikoa*, non ikasleek haien oinarrizko estrategiarekin lan eginez egoerari hainbat erantzun posible ematen dizkiote. Bigarrena, *instituzionalizazio* fasea, non irakasleak ikasleek bereganatu behar duten ezagutza azaltzen amaitzen duen (Chevallard, 1997, 213: 226).

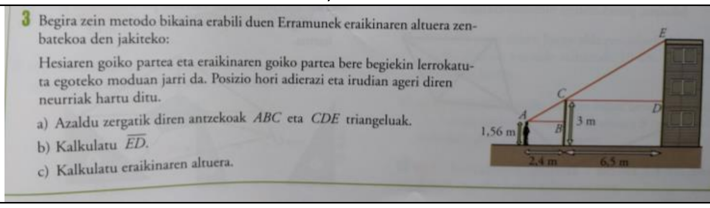
Gainera, jarduera mota guzti hauek ikasketarako hiru faseetan banatu daitezke: esplorazioa, trebatzea eta sakontzea. Lehenengoa instituzionalizatu gabeko nozio edo prozedura baten ikerketa izanen da. Bigarrena, ilustratutako nozio edo prozedura finkatzeko eta azkena, nozioa edo prozedura finkatzean etorriko den nozio edo prozedura berri baten esplorazioarekin lotuko da, ikasketa zirkulua itxiz (Lasa, 2015, 22:24).

3.1. Ariketak, problemak, galdera eta egoera motak DBH2n

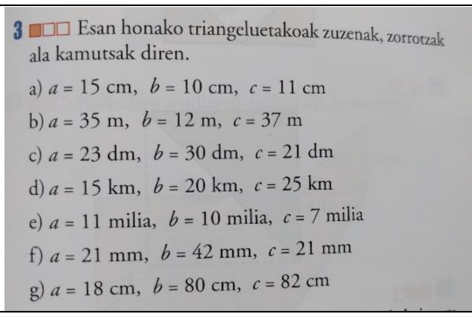
DBH2ko kurtsoko testu liburua aztertzerako momentuan, Matematika 2 liburua aztertu da, Ibaizabal argitaletxekoa. Guztira, 15 gai lantzen ditu. Kasu honetan, aztergai den edukiarekin bakarrak izanen du erlazioa: 8. gaia Pitagorasen Teorema eta antzekotasuna.

	Esplorazio	**Trebatze**	**Sakontze**	Guztira
Ariketak	-	32	5	37
Problemak	-	25	13	38
Galderak	-	2	-	2
Egoerak	-	-	-	-
Guztira	-	59	18	77

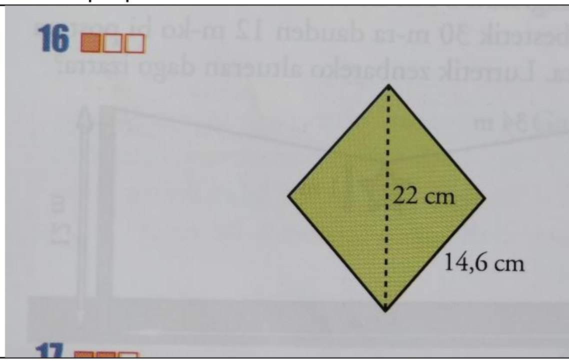
16. taula: DBH4ko testu liburuan 7. gaian agertzen diren jardueren sailkapena.

Jarduera mota	Ariketa	**Problema**	Galdera	Egoera
Deskribapena	Triangeluen ebazpenerako erabiltzen diren ohiko problemak. Ebazpenean trebatzeko erabiltzen dira, teknika konkretu bat ikasteko.			
Adibidea	 3 Begira zein metodo bikaina erabili duen Erramunek eraikinaren altuera zenbatekoa den jakiteko: Hesiaren goiko partea eta eraikinaren goiko partea bere begiekin lerrokatuta egoteko moduan jarri da. Posizio hori adierazi eta irudian ageri diren neurriak hartu ditu. a) Azaldu zergatik diren antzekoak ABC eta CDE triangeluak. b) Kalkulatu $\overline{ED}$. c) Kalkulatu eraikinaren altuera. 			
Kokapena	2 DBH Matematika, 8. gaia, 177. orrialdea.			

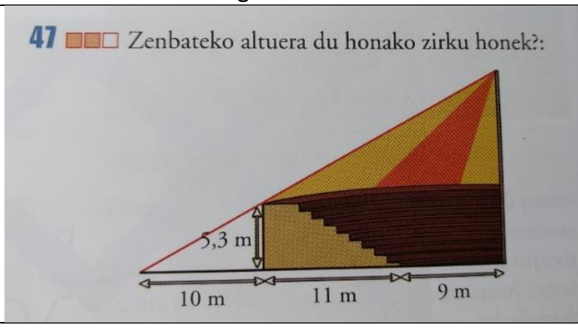
17. taula: DBH2ko testu liburuan agertzen den galdera mota.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Pitagorasen Teoreman azkartasuna eta trebatze maila erabiltzen dira galdera motz hauek.			
Adibidea	 3 Esan honako triangeluetakoak zuzenak, zorrotzak ala kamutsak diren. a) $a = 15$ cm, $b = 10$ cm, $c = 11$ cm b) $a = 35$ m, $b = 12$ m, $c = 37$ m c) $a = 23$ dm, $b = 30$ dm, $c = 21$ dm d) $a = 15$ km, $b = 20$ km, $c = 25$ km e) $a = 11$ milia, $b = 10$ milia, $c = 7$ milia f) $a = 21$ mm, $b = 42$ mm, $c = 21$ mm g) $a = 18$ cm, $b = 80$ cm, $c = 82$ cm			
Kokapena	2 DBH Matematika, 8. gaia, 179. orrialdea.			

18. taula: DBH2ko testu liburuan agertzen den galdera mota.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Ikasleak kalkulu azkarretara ohitzeko erabiltzen diren ariketak dira. Gainera, begi-bistaz propietateak identifikatzeko balio dutenak.			
Adibidea				
Kokapena	2 DBH Matematika, 8. gaia, 180. orrialdea.			

19. taula: DBH2ko testu liburuan agertzen den ariketa mota.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Triangeluen ebazpenerako, bai trebatze eta baita kontzeptuak sakontzeko garaian ere problemen erabilera nagusitzen da. Modu honetan, trigonometria bizitza errealeko egoerekin erlazionatu dezakete.			
Adibidea				
Kokapena	2 DBH Matematika, 8. gaia, 183. orrialdea.			

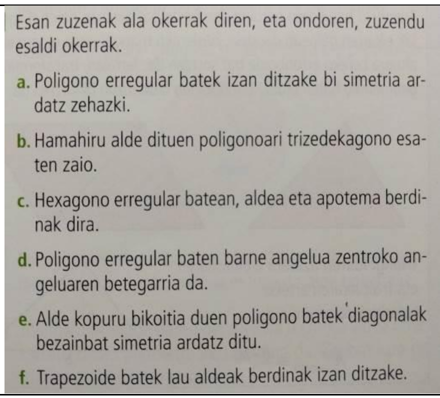
20. taula: DBH2ko testu liburuan agertzen den problema mota.

3.2. Ariketak, problemak, galdera eta egoera motak DBH3n

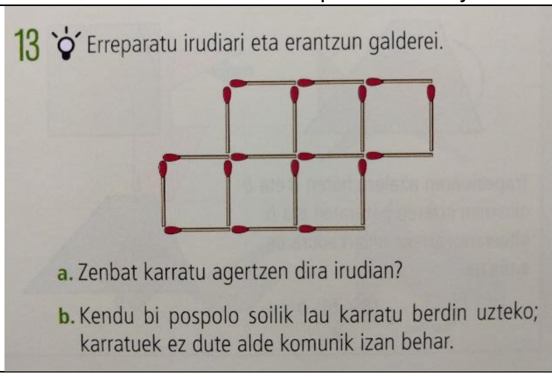
Sailkapen hau egiterako orduan Matematika Akademikoak liburua aztertu da. Ikasturte honetarako 3 liburuki desberdin daude guztira 13 gai lantzen dituztenak. Kasu honetan 3. erabiliko da Geometriako edukia barne biltzen duelako. Lau gai agertzen dira liburuxka honetan, eta lauak daukate Geometriarekin erlazioa, baina ba hautatuko da, orain arte egindako analisiarekin erlazioa dutena hain zuzen ere: 10. gaia: Irudi lauak. Ikus 21. taula.

	Esplorazio	**Trebatze**	**Sakontze**	**Guztira**
Ariketak	1	33	4	38
Problemak	-	8	14	22
Galderak	2	6	4	12
Egoerak	1	-	-	1
Guztira	4	47	22	73

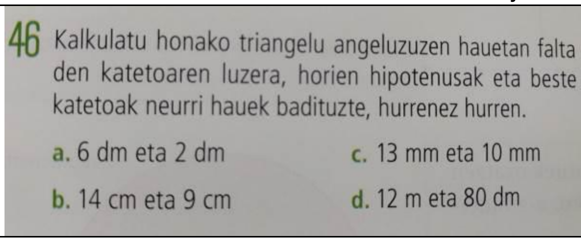
21. taula: DBH3ko testu liburuan 10. gaian agertzen diren jardueren sailkapena.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Jarduera teoriko bat da. Poligonoen sailkapenean trebatzeko eta ulertutzat emateko balio du.			
Adibidea	 Esan zuzenak ala okerrak diren, eta ondoren, zuzendu esaldi okerrak. a. Poligono erregular batek izan ditzake bi simetria ardatz zehazki. b. Hamahiru alde dituen poligonoari trizedekagono esaten zaio. c. Hexagono erregular batean, aldea eta apotema berdinak dira. d. Poligono erregular baten barne angelua zentroko angeluaren betegarria da. e. Alde kopuru bikoitia duen poligono batek diagonalak bezainbat simetria ardatz ditu. f. Trapezoide batek lau aldeak berdinak izan ditzake.			
Kokapena	3 DBH Matematika Akademikoak, 3. liburukia, 10. gaia, 217. orrialdea.			

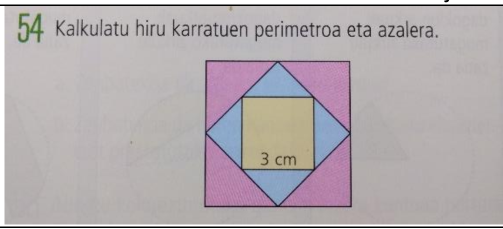
22. taula: DBH3ko testu liburuan agertzen den galdera mota.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Ikaslea egoera baten aurrean egonik, bere oinarrizko estrategiaz lagundurik ondorioak atera behar dituen. Esploraziorako jarduera da.			
Adibidea	 13 Erreparatu irudiari eta erantzun galderei. a. Zenbat karratu agertzen dira irudian? b. Kendu bi pospolo soilik lau karratu berdin uzteko; karratuek ez dute alde komunik izan behar.			
Kokapena	3 DBH Matematika Akademikoak, 3. liburukia, 10. gaia, 217. orrialdea.			

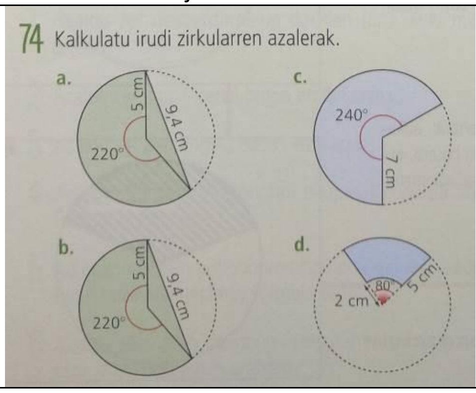
23. taula: DBH3ko testu liburuan agertzen den egoera mota.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Formula bat aplikatuz behin eta berriz prozedura berdinaren errepikapena ematen da Pitagorasen teorema erabiltzen ikasteko. Trebatzeko jarduera bat da.			
Adibidea	 46 Kalkulatu honako triangelu angeluzuzen hauetan falta den katetoaren luzera, horien hipotenusak eta beste katetoak neurri hauek badituzte, hurrenez hurren. a. 6 dm eta 2 dm b. 14 cm eta 9 cm c. 13 mm eta 10 mm d. 12 m eta 80 dm			
Kokapena	3 DBH Matematika Akademikoak, 3. liburukia, 10. gaia, 225. orrialdea.			

24. taula: DBH3ko testu liburuan agertzen den ariketa mota.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Jarduera hau hainbat teknika eta prozedura erabiliz ebatzi behar da, Pitagorasen teoreman sakontzeko erabiltzen dira honako jarduerak.			
Adibidea	 54 Kalkulatu hiru karratuen perimetroa eta azalera. 			
Kokapena	3 DBH Matematika Akademikoak, 3. liburukia, 10. gaia, 225. orrialdea.			

25. taula: DBH3ko testu liburuan agertzen den problema mota.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Jarduera hau hainbat teknika eta prozedura erabiliz ebatzi behar da, formula desberdinak (azalerak, Pitagorasen teorema...) sakontzeko erabiltzen dira honako jarduerak.			
Adibidea				
Kokapena	3 DBH Matematika Akademikoak, 3. liburukia, 10. gaia, 229. orrialdea.			

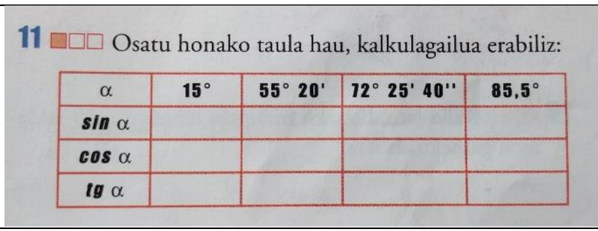
26. taula: DBH3ko testu liburuan agertzen den problema mota.

3.3. Ariketak, problemak, galdera eta egoera motak DBH4n

Sailkapen hau egiterako orduan Matematika B Aukera liburua aztertu da. Guztira 11 gai lantzen ditu. Kasu honetan, aztertzen ari den edukiarekin, triangeluen ebazpenarekin, bakarrak izanen du erlazioa: 7. gaia Trigonometria.

	Esplorazio	**Trebatze**	**Sakontze**	Guztira
Ariketak	3	35	3	41
Problemak	-	20	12	32
Galderak	-	4	8	12
Egoerak	-	-	-	0
Guztira	3	59	23	85

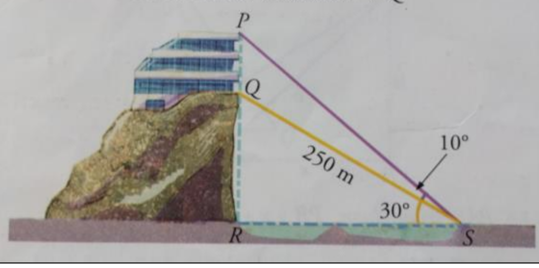
27. taula: DBH4ko testu liburuan 7. gaian agertzen diren jardueren sailkapena.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Angeluen arrazoi trigonometrikoen kalkuluaren errepikapenaren bidez ezagutzaren barneraketa ziurtatu nahi da. Kalkulu hauek egiteko trebatze prozesu batean sailkatu daiteke.			
Adibidea	 11 Osatu honako taula hau, kalkulagailua erabiliz: α | 15° | 55° 20' | 72° 25' 40'' | 85,5° sin α cos α tg α			
Kokapena	4 DBH Matematika B Aukera, 7. gaia, 161. orrialdea.			

28. taula: DBH4ko testu liburuan agertzen den ariketa mota.

<table>
<tr><td>Jarduera mota</td><td>Ariketa</td><td>Problema</td><td>Galdera</td><td>Egoera</td></tr>
<tr><td>Deskribapena</td><td colspan="4">Errealitateko egoeretara kalkulu trigonometrikoa eraman nahian, horrelako problemak agertzen dira. Tekniken trebatze prozesuaren barnean kokatu daiteke.</td></tr>
<tr><td>Adibidea</td><td colspan="4">30 ■■□ Errepide batean dagoen arrisku-seinale batek malda % 12koa dela adierazten digu. Zenbateko angelua eratzen du errepide zati horrek horizontalarekin? Zenbat metro egin ditugu beherantz errepide horretan 7 km egin ondoren?</td></tr>
<tr><td>Kokapena</td><td colspan="4">4 DBH Matematika B Aukera, 7 gaia, 163. orrialdea.</td></tr>
</table>

29. taula: DBH4ko testu liburuan agertzen den problema mota.

<table>
<tr><td>Jarduera mota</td><td>Ariketa</td><td>Problema</td><td>Galdera</td><td>Egoera</td></tr>
<tr><td>Deskribapena</td><td colspan="4">Teknika desberdinak lantzen dituzten eta gainera, idazkera matematikoa erabiltzen dituzten problemak sakontze prozesu batean kokatu daitezke.</td></tr>
<tr><td>Adibidea</td><td colspan="4">41 ■■□ Eraikinaren altuera, $\overline{PQ}$, kalkulatzeko, irudiak adierazten dituen angelu horiek neurtu ditugu. Badakigu S-tik Q-ra joateko funikular bat dagoela eta 250 m-ko luzera duela. Kalkulatu $\overline{PQ}$.

</td></tr>
<tr><td>Kokapena</td><td colspan="4">4 DBH Matematika B Aukera, 7 gaia, 164. orrialdea.</td></tr>
</table>

30. taula: DBH4ko testu liburuan agertzen den problema mota.

<table>
<tr><td>Jarduera mota</td><td>Ariketa</td><td>Problema</td><td>Galdera</td><td>Egoera</td></tr>
<tr><td>Deskribapena</td><td colspan="4">Ondorio azkarrak ateratzera bideratuta daude. Ikasleek begi bista batean ondorioak ateratzen trebatzeko.</td></tr>
<tr><td>Adibidea</td><td colspan="4">54 ■□□ Egon daiteke sinua 2 duen angelurik? Eta kosinua 3/2 duen angelurik? Arrazoitu erantzunak.</td></tr>
<tr><td>Kokapena</td><td colspan="4">4 DBH Matematika B Aukera, 7 gaia, 165. orrialdea.</td></tr>
</table>

31. taula: DBH4ko testu liburuan agertzen den galdera mota.

3.4. Ariketak, problemak, galdera eta egoera motak 1. Batxilergoan

1. kapituluan aipatu den moduan, 18. orrialdean ikus daiteke, Giza eta Gizarte zientzietarako batxilergoan ez dagoela triangeluen ebazpenarekin erlazionatutako edukirik, beraz, Zientzia eta Teknologiako batxilergoko modalitateko jarduerak aztertuko dira. Sailkapen hau egiteko Matematika I liburua aztertu da. Guztira 15 gai lantzen ditu. Kasu honetan, aztertzen ari den edukiarekin, triangeluen ebazpenarekin, bakarrak izanen du erlazioa: 4. gaia: Triangeluak ebatzi, 6. gaia: Zenbaki Konplexuak eta 7. gaia: Bektoreak[4].

	Esplorazio	**Trebatze**	**Sakontze**	Guztira
Ariketak	-	23	-	23
Problemak	-	16	3	19
Galderak	-	1	-	1
Egoerak	-	-	-	-
Guztira	-	40	3	43

32. taula: 1.Batxilergoko testu liburuan 4. gaian agertzen diren jardueren sailkapena.

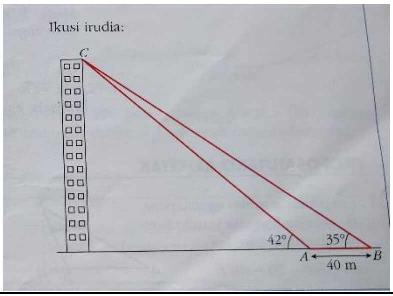
	Esplorazio	**Trebatze**	**Sakontze**	Guztira
Ariketak	-	14	-	14
Problemak	-	-	-	-
Galderak	-	-	-	-
Egoerak	-	-	-	-
Guztira	-	14	-	14

33. taula: 1.Batxilergoko testu liburuan 6. gaian agertzen diren jardueren sailkapena.

	Esplorazio	**Trebatze**	**Sakontze**	Guztira
Ariketak	-	11	1	12
Problemak	-	-	1	1
Galderak	-	1	1	2
Egoerak	-	-	-	-
Guztira	-	12	3	15

34. taula: 1.Batxilergoko testu liburuan 7. gaian agertzen diren jardueren sailkapena.

[4] Gai hauetan, bakarrik triangelu zuzenen ebazpenarekin duten jarduerak aztertuko dira, sinuaren eta cosinuaren teorema adibidez ez.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Errealitateko egoerak agertzen dira trigonometria lantzeko orduan. Jarduera mota hauek asko erabiltzen dira trigonometria ikasteko, beraz, tekniketan trebatzeko erabiltzen dira.			
Adibidea	**4.** *A*-n gaude, eraikina zenbateko angeluz ikusten den neurtu dugu (42°), 40 m urrundu gara, eta berriro neurtu dugu angelua (35°). Zenbateko altuera du eraikinak eta zenbateko distantziara gaude gu? 			
Kokapena	1.batxilergoko Matematika I, 4. gaia, 113. orrialdea.			

35. taula: 1 Batxilergoko testu liburuan agertzen den problema mota.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Prozedura bat finkatzera eta honetan trebatzera bideratutako ariketak nagusitzen dira.			
Adibidea	**2.** Idatzi forma binomikoan honako zenbaki konplexu hauek: a) $5_{(\pi/6)\ \text{rad}}$ b) $2_{135°}$ c) $2_{495°}$ d) $3_{240°}$ e) $5_{180°}$ f) $4_{90°}$			
Kokapena	1.batxilergoko Matematika I, 6. gaia, 153. orrialdea.			

36. taula: 1 Batxilergoko testu liburuan agertzen den ariketa mota.

Jarduera mota	Ariketa	Problema	Galdera	Egoera
Deskribapena	Galdera teoriko motzak, propietateak barneratzera eta hauen identifikazio azkarrean trebatzera bideratutakoa.			
Adibidea	**52** $\vec{a}$ eta $\vec{b}$ nuluak ez diren bi bektore dira. Esan zer angelu eratzen duten kasu hauetako bakoitzean: a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\ \lvert\vec{b}\rvert$ $\alpha=0°$ b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ $\alpha=90°$ c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -\lvert\vec{a}\rvert\ \lvert\vec{b}\rvert$ $\alpha=180°$ d) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0{,}5\ \lvert\vec{a}\rvert\ \lvert\vec{b}\rvert$ $\alpha=60°$			
Kokapena	1.batxilergoko Matematika I, 7. gaia, 185. orrialdea.			

37. taula: 1 Batxilergoko testu liburuan agertzen den galdera mota.

3.5. Ariketak, problemak, galdera eta egoera motak 2. Batxilergoan

Bigarren maila honetan ere, Zientzia eta Teknologiako batxilergoko modalitateko jarduerak aztertuko dira. Sailkapen hau egiteko Matematika II liburua aztertu da. Guztira 13 gai lantzen ditu. Kasu honetan, aztertzen ari den edukiarekin, triangeluen ebazpenarekin, bakarrak izanen du erlazioa: 5. gaia: Bektoreak espazioan.

	Esplorazio	**Trebatze**	**Sakontze**	Guztira
Ariketak	-	22	12	34
Problemak	-	2	1	3
Galderak	2	7	-	9
Egoerak	-	-	-	-
Guztira	2	31	13	46

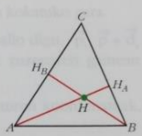
38. taula. 2.Batxilergoko testu liburuan 5. gaian agertzen diren jardueren sailkapena.

<table>
<tr><td>Jarduera mota</td><td>Ariketa</td><td>Problema</td><td>Galdera</td><td>Egoera</td></tr>
<tr><td>Deskribapena</td><td colspan="4">Ariketa motzak eta azkar egitekoak, teknika konkretuetan ikasleak trebatzeko.</td></tr>
<tr><td>Adibidea</td><td colspan="4">10 $\vec{a}(1, 2, 3)$ eta $\vec{b}(2, -2, 1)$ ortogonalak dira? Ez badira, aurkitu zer angelu eratzen duten.</td></tr>
<tr><td>Kokapena</td><td colspan="4">2.batxilergoko Matematika II, 5. gaia, 149. orrialdea.</td></tr>
</table>

39. taula: 2 Batxilergoko testu liburuan agertzen den ariketa mota.

<table>
<tr><td>Jarduera mota</td><td>Ariketa</td><td>Problema</td><td>Galdera</td><td>Egoera</td></tr>
<tr><td>Deskribapena</td><td colspan="4">Galdera mota hauek teoria praktikan identifikatzera bideratutakoak dira. Ikasleak horietan trebatzera.</td></tr>
<tr><td>Adibidea</td><td colspan="4">43 a) Egon daitezke $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$ beteko duten $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bi bektore?
b) Bi bektorek $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|$ egiaztatzen badute, zer esan dezakezu eratzen duten angeluari buruz?</td></tr>
<tr><td>Kokapena</td><td colspan="4">2.batxilergoko Matematika II, 5. gaia, 151. orrialdea.</td></tr>
</table>

40. taula: 2 Batxilergoko testu liburuan agertzen den galdera mota.

<table>
<tr><td>Jarduera mota</td><td>Ariketa</td><td>Problema</td><td>Galdera</td><td>Egoera</td></tr>
<tr><td>Deskribapena</td><td colspan="4">Gaiaren amaieran, problemak agertzen dira, eta oso gutxi prozedura desberdinetan sakontze prozesu bat ahalbidetzen dutenak.</td></tr>
<tr><td>Adibidea</td><td colspan="4">48 "Triangelu baten hiru altuerek puntu batean ebakitzen dute elkar".
Hori egiaztatzeko, H esango diogu AH_A eta BH_B, bi altuerek elkar ebakitzen duten puntuari. Eman ondoren zehazten diren urrats hauek:

a) Justifikatu hau: $\begin{cases} \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0 \\ \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0 \end{cases}$
b) Aurreko berdintza horietatik, hona heltzen gara:
$\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$
eta, hortik, $\vec{HC} \perp AB$ ateratzen dugu, eta, beraz, hiru altuerek H puntuan elkar ebakitzen dutela. (Justifikatu aurreko baieztapen horiek).</td></tr>
<tr><td>Kokapena</td><td colspan="4">2.batxilergoko Matematika II, 5. gaia, 151. orrialdea.</td></tr>
</table>

41. taula: 2 Batxilergoko testu liburuan agertzen den problema mota.

4. Kapitulua

Emaitzak

Curriculumak argi eta garbi dio eduki matematikoak integratu egin behar direla ikaskuntza-irakaskuntza proposamenetan, eta bereziki, eduki aljebraikoak integratu behar dira gainerako eduki geometriko eta funtzionalekin. Hori horrela izanik ere, testuliburuetan aurkitu diren proposamenek, oro har, ez dituzte ezaugarri horiek betetzen.

Aztertutako testu liburuetan, curriculumeko blokeak bere horretan agertzen dira, elkarrengandik banatuta eta isolatuta. Honela, triangeluen ebazpena DBHko geometria atalean sailkatzen da. Atal horretan, ikasleek landu egiten dituzte prozedurak, teoremak, formulak eta irudikapen grafikoak, horiek barneratu ahal izateko. Hala ere, gai isolatu gisa lantzen denez, ikasleek nozio guzti hauek ez dituzte integratzen eta bakanduta ikasten dituzte.

Bigarren Hezkuntzako amaierako bi kurtsoetan ordea (Batxilergoan), triangeluen ebazpena ez da modu esplizituan agertzen. Geometriarekin erlazionatutako gaietan inplizituki lantzen da. Hau da, bektoreak lantzerakoan modulua kalkulatzerakoan edota zenbaki konplexuetan ere Pitagorasen teorema erabiltzen da.

Gutxika transbertsalki lantzen den edukia den arren, argi eta garbi ikusten da bai curriculumean edota testu liburuetan ere Geometriak indarra galtzen duela kurtsoak pasa ahala.

4.1. Ausentziak eta presentziak testu liburuetan

Hirugarren kapituluan egin den azterketatik 42. taulan laburbiltzen dira ateratako ondorioak. Bertan, kurtso bakoitzean dauden jardueren motak (ariketak, problemak, galderak edo egoerak, ikus 29. orrialdea) ikus daitezke.

	DBH2	**DBH3**	**DBH4**	**1. BATX.**	**2. BATX**
Ariketak	48.1%	%52.2	%48.2	%68	%74
Problemak	49.5%	%30	%37.6	%28	%6.5
Galderak	2.4%	%16.4	%14.2	%4	%19.5
Egoerak	0%	%1.4	%0	%0	%0

42. taula: Jardueren azterketa motaren arabera.

Portzentajeak aztertuz, triangelu zuzenen ebazpenarekin erlazionatutako jardueren gehiengoa ariketak direla ikus daiteke. Problemak ere agertzen dira, batez ere DBH4 mailan, triangelu zuzenen ebazpena lantzen delako eta oso erabilgarriak dira bizitza errealarekin erlazionatutako problemak erabiltzea.

Aipatzekoa da, egoerei dagokienez dagoen hutsunea. Ikasleen pentsamendu autonomoa eta gaitasunak garatzeko beste aukera bat ematen duten jarduerak izanik oso gutxi agertzen dira erabiltzen diren testu liburuetan. DBHko 3.mailako liburuan bat agertzen da, eta esan beharra dago testu liburu berria dela.

Gainera, jardueren faseak (esplorazio, trebatze eta sakontze, ikus 29. orrialdea) ere aztertu dira portzentaje orokorrak ateraz.

	DBH2	DBH3	DBH4	1. BATX.	2. BATX
Esplorazio	0%	%5.5	%3.5	%0	%4.4
Trebatze	76.6%	%64.5	%69.5	%91.5	%67.4
Sakontze	23.4%	%30	%27	%8.5	%28.2

43. taula: Jardueren azterketa faseak kontutan hartuta.

Bigarren analisi honetan ere, argi ikusten da trebatzera bideratutako jarduerak nagusitzen direla eta ikasleei euren ezagutzekin esplorazio fase bat ahalbidetuko zieten jarduera motak ez direla agertzen. Esplorazio fasea oso fase interesgarria dela esan beharra dago, ikasleek aurretik dituzten nozioak erabiliz berriak antzematen hasten direlako. Ikasketa prozesu honek ikasleen lan autonomoari ere erreparatzen dionez ikasleek modu egoki batean ikasten dute.

Orokorrean, testu liburuetan agertzen diren jardueren gehiengoa ariketak dira, trebatze fasean kokatu daitezkeenak. Jarduera mota hauek errepikapenean oinarritzen dira eta teknikak mekanizatzeko erabiltzen dira.

4.2. Testu liburuen eta curriculumaren arteko koherentzia

Orokorrean, geometriarekin erlazionatutako edukiak geroz eta murritzagoak dira Giza eta Gizarte zientzietara bideratutako ibilbideetan. Honek ez du esan nahi beste modalitateetan izugarrizko garrantzia duenik. Curriculumaren irakurketa egiterakoan argi ikus daiteke geometriarekin erlazioa duten edukiak oso konkretuak direla eta ez dela ez algebra ez aritmetika hauen artean agertzen. Aldiz, irudi geometrikoen ebazpena egiterako orduan tresna hauek beharrezkoak dira.

Eduki konkretuetaz hitz egiterakoan, lehenengo deskriptoreari egingo zaio erreferentzia: geometria laua eta espazialaren identifikazioa. Kurtsoek aurrera egin ahala ikus daiteke honen lehentasuna murrizten joan dela. Honek islatzen du eduki teoriko batzuen lanketa “amaitutzat” eman daitekeela, triangeluen sailkapena edota poligonoena adibidez.

Gainera, lehenengo kapitulu honen tauletan islatuta dagoen moduan, triangeluen ebazpena edo orokorrago geometriaren ebazpena egin ahal izateko ikasleek beste tresna batzuen beharra dutela. Honela, aljebra eta aritmetika ezinbesteko erramintak izanen dira curriculumaren bloke hau aztertzerakoan.

Ebaluazio irizpideei dagokienez, oso orokorrak dira. Geometriarekin zuzenean erlazioa duten ebaluazio irizpide gutxi daude. Aritmetika eta aljebrarekin erlazionatutakoak dira gehienak. Nahiz eta ebaluazio irizpide hauek ez dauden blokeka sailkatuta, erlazio zuzena esleitzen zaie hasieratik. Baina, kapitulu honen baitan ikusi da nola geometriarekin erlazioa duten deskriptoreen ebaluazioa beste blokeekin erlazionatzen diren irizpideekin ere egin daitekeen.

Aipatzekoa da, Lehen Hezkuntzatik DBHra ematen den saltoa, batez ere emaitzaren analisiari dagokionez. DBH osoan, emaitzaren koherentzia ulertzeari izugarrizko garrantzia ematen zaio. Funtzioen analisiari erlazionatutako ebaluazio irizpideek ere gutxika espazioa bereganatuz joanen dira. Batez ere Batxilergoko bi kurtsoetan. Honela, Estatistika eta Geometria alboratuta geratuz. Geometria ezkutuan geratzen da, beste gai batzuetan era xume batean lantzen delarik, bektoreekin edota zenbaki irrazionalekin erlazioa duten gaietan adibidez.

Beraz, ikus daiteke, curriculuma antolatutako blokeetan oinarritzeaz gain, horrela lan egitera ere bideratzen dela. Aritmetika, Aljebra eta Funtzioei garrantzia emanez. Lehenengo biak zeharkakoak direla zehaztu gabe. Baina kurtsoetan aurrera egin ahala, funtzioen analisian izango du arlo honek garrantzirik handiena. Beraz, eduki guztiak norabide horretan jorratuko dira.

Azkenik, aipagarria da, edukietan teknologia berriek duten garrantzia ebaluazio irizpideetan ez dela islatuta ikusten jakinik gaur egungo gizartean teknologia berrien erabilera asko baloratzen dela.

II Atala

Bigarren Hezkuntzako matematiketan ikasketa prozesu baten analisia

Master Bukaerako Lanaren bigarren zati honetan triangelu zuzenen ebazpena lantzeko proposamen bat egingo da. Proposamen hori DBH4ko aniztasuneko gela batean lantzeko diseinatu du, eta haren analisia beste lau kapitulutan banatuta agertuko da.

Bostgarren kapituluan, edukiaren lanketa egiteko proposamen arrazoitu bat eginen da. Ikuspegi ontosemiotikoan oinarrituko da analisia, hortaz, jarduera matematikoaren barnean parte hartzen duten objektu matematikoen analisia eginen da, lehen mailakoak eta bigarren mailakoak aztertuko dira nagusiki. Gainera, software dinamikoaren erabilera ere arrazoituko da, eta horretarako hiru momentu definituko dira: esplorazioa, ilustrazioa eta frogapena. Ondoren, erreferentziatzat hartutako testu liburuaren analisia eginen da, batez ere jardueren izaeran. Aztertutako elementu guzti hauen batura eginen da, jardueraren proposamena eta diseinuaren aurkezpena egin ahal izateko.

Seigarren kapituluan esperimentazioa izanen da hizpide. Horretarako, jardueraren diseinua oinarri hartuta, fase desberdinak definitu dira, klasean jarraitu beharrekoak. Ondoren, ikasleek unitate didaktiko honen ikasketa prozesuan izan ditzaketen zailtasunak aurreikustea da helburua, hiru azpi mailatan sailkatuta: zailtasun soziologikoak, pedagogikoak eta didaktikoak. Zailtasun horietatik abiatuta eta hainbat egileren lan teorikoak aintzat hartuz, zailtasun horien atzean egon daitezkeen oztopoak aurreikusiko dira ere. Oraingoan ere aurreko hiru azpimailekin erlazioa duten beste hiru definituko dira: kulturalak (zailtasun soziologikoekin erlazioa dute); afektiboak (zailtasun pedagogikoekin erlazioa dute); eta kognitiboak (zailtasun didaktikoekin erlazionatu daitezke).

Horrez gainera, kapitulu horretan bertan, esperimentazioan lortutako emaitzen eztabaida egingo da. Aurkeztuko dira obserbaturiko emaitza horien azalpen posibleak, eta horiekin ondorioak harilkatuko dira. Horretarako, konparatu egingo dira emaitzetan ikusitako gertaerak eta aurretik aurkeztutako lanabes teorikoak.

Azkeneko kapituluan, lanaren bigarren atalean ateratako ondorioak agertuko dira sintesi moduan, bai eta lan osoaren ondorio orokorrak ere. Amaitzeko, galdera berriak (galdera irekiak) proposatuko dira etorkizunean hauen gainean lan egin ahal izateko bidea zabaltzeko.

5. Kapitulua

Triangeluen ebazpena lantzeko proposamen arrazoitua

Erreferentziazko testu liburuan triangeluen ebazpenak duen presentzia aztertzeko, ikuspegi ontosemiotikoa (IOS) erabiliko da erreferentzia moduan. Konkretuki, IOSen barnean sailkatu egiten dira jarduera matematikoan parte hartzen duten objektu matematikoak, hiru sakontasun mailatan. Lehenengo bi sakontasun mailak erabiliko dira, Lasak (2015, 33:41) jasotzen dituen zentzuan.

Lehen mailako objektu matematikoen artean daude, besteak beste, jarduera matematikoaren baitan eta elkarrizketa bidez erabiltzen diren elementu linguistikoak, eduki horiek garatzeko eta lantzeko ikasleari proposatzen zaizkion egoerak eta problemak, praktika horietatik eratortzen diren kontzeptuak eta definizioak, definizio horien barne loturen bidez eratzen diren proposizioak, prozedurak arin egiteko erabiltzen diren algoritmoak edota prozedura horiek guztiak justifikatzeko erabiltzen diren argudioak.

Bigarren maila batean aztertzen dira aurreko objektu primario horien guztien artean sortzen diren prozesuak. Prozesu horietan, berebiziko garrantzia hartzen du ikaslearen eta irakaslearen arteko elkarreraginak. Honela, sortzen dira prozesu dual batzuk, besteak beste, pertsonala/instituzionala, ostentsiboa/ez ostentsiboa, edota estentsibo/intentsiboa.

Erreferentziazko testu liburua aztertzeaz gainera, esperimentazioan eredu dinamikoak erabiliko dira. Honela, ezinbestekoa da, baita ere, eredu dinamikoen erabileran sakontzea. Horretarako, zehaztu egingo dira zer nolako eredu dinamikoak erabil daitezkeen praktika matematikoa antolatzeko euskarri gisa, horiek dira, *esplorazio*, *ilustrazio* eta *frogapen* ereduak (Lasa, 2015, 22:24).

5.1. Lehen mailako objektu matematikoak

Lehen mailako objektu matematikoen artean, beraz, sailkatu egiten dira praktika matematikoan parte hartzen duten elementu primarioak. Horietan lehenak elementu linguistikoak dira, eta horien artean, zehaztu egiten dira *terminoak*, *espresioak*, *notazioak* edota *grafikoak*; horiek ager daitezke *ahoz*, *idatziz* edota *imintzioz* (Lasa, 2015, 38).

- *Sinbolikoak*. Triangeluak adierazterako orduan, bai horiek nola haien elementuak izendatzeko, aldagai sinbolikoak erabiltzen dira. Esate baterako, aldeak adierazteko letra latinoak erabiltzen dira: a, b, c, e.a.; triangeluaren barne-angeluak adierazteko, berriz, letra grekoak: α, β, γ, e.a.; erpinen arabera ere izenda daitezke triangeluak, eta erpin horiek adierazteko letra larriak erabiltzen dira: A, B, C, e.a.; adierazpen sinbolikoen barnean aipatu behar dira, baita ere, funtzio trigonometrikoak adierazteko kodifikazioak: sin, cos, tan, e.a.
- *Grafikoak*. Adierazpen sinboliko horiek guztiek, normalean, adierazpen grafikoa izaten dute lagungarri, hau da, triangelua bera marrazten da, eta irudikapen

grafiko horren gainean marrazten dira dagozkion aldagaiak. Funtzio trigonometrikoak grafikoki adierazteko, gainera, ardatz cartesiarrak erabili ohi dira, halako moduz, non abzisen ardatzean angelua zehazten den, eta ordenatuan, berriz, arrazoi trigonometrikoaren balioa. Horrez gainera, tabulazioak eta taulak ere erabiltzen ohi dira, zenbakizko informazioa antolatzeko.

Agertzen diren bigarren elementuak egoerak edo problemak dira. Hauek normalean, jarduera gisa aurkezten dira. Matematikaz haraindiko aplikazioak bezala ere definitu daitezke (Lasa, 2015, 38).

- *Egoera intramatematikoa*. Galdera teorikoak arrazoi trigonometrikoekin erlazionatuta; Triangelu baten bi aldeak emanda arrazoi trigonometrikoen kalkulua; Arrazoi trigonometrikoa emanda triangelua eraikitzea; Enuntziatu batetik triangeluaren ustezko adierazpen grafikoa egitea eta arrazoi trigonometrikoen kalkulua; triangelu bat “ebaztea”, hau da, ezezagunak zaizkion datu guztiak lortzea, aldeen luzerak eta barne-angeluak.
- *Egoera extramatematikoak*. Errealitatetik hartutako problema trigonometrikoen soluzioak bilatzea [zehaztu daiteke, normalean izaten dira distantzia ez irisgarriak kalkulatzea: altuerak, ibai baten beste alderako distantzia, e.a., hau, kartografiari eta triangeluazioari loturiko problemak]

Ondoren, kontzeptu eta definizioak agertzen dira, deskribapenen bidez sartzen direnak. Nozioak direla ere esan daiteke, termino konkretuak eta matematikaren funtsa ulertzeko beharrezkoak direnak (Lasa, 2015, 38).

- *Zenbakizkoak*. Zenbaki arrunta; zenbaki osoa; zenbaki arrazionala; zenbaki irrazionala. Normalean, aldeen luzerak zenbaki arrunten bidez ematen dira; arrazoi trigonometrikoen kalkuluetan, zenbaki arrunten arteko zatikiak agertuko dira, beraz; aldiz, Pitagorasen Teoreman, zenbaki irrazionalak agertzen dira (erroak).
- *Arrazoi trigonometrikoak*. Sin, cos, tan, e.a.
- *Angeluaren unitateak*. Radianak eta hirurogeitarrak.
- *Triangeluen sailkapenak*. Ekilateroa, isoszelea, eskalenoa, zorrotza, kamutsa, zuzena, aldeak, hipotenusa, angelua.

Laugarren elementu bezala proposizioak daude, zeinak kontzeptuen gaineko enuntziatuak diren (Lasa, 2015, 38). Normalean, formulen itxurarekin agertzen dira DBHko mailatan.

- *Pitagorasen Teorema*. Pitagorasen teorema erabilera triangelu zuzenen aldeen kalkulua egiterako orduan. Bai, hipotenusa kalkulatu behar denean, edota, kateto baten kalkulua egiterako orduan. Bi norabideetan erabili beharko dute ikasleek.

Gero, prozeduren analisia eginen da, zeinak algoritmoak, eragiketak eta kalkulurako teknikak barnebiltzen dituzten (Lasa, 2015, 38). Kasu honetan hiru multzo desberdin egin dira erabiliko diren tresnen arabera, papera eta arkatza, kalkulagailua edo ordenagailua.

- *Oinarrizko manipulazio aljebraikoen bidez*. Lehenengo mailako ekuazioen ebazpena; bigarren mailako ekuazioen ebazpena (Pitagoras).
- *Kalkulagailuz*. Oinarrizko eragiketa aritmetikoak, aldeen eta angeluen batuketa eta kenketa. Arrazoi trigonometriko batetik angelua lortzea. Angelua emanda arrazoi trigonometrikoa lortzea.
- *Ordenagailuz*. Balio taulak osatzea.

Azkenik, prozedura honetan erabiliko diren argudioak aztertuko dira. Proposizioak eta prozedurak balioztatzeko edo azaltzeko behar diren enuntziatuak, normalean, deduktiboak edo induktiboak izan daitezke (Lasa, 2015, 38). Prozedura honetan, argudio induktiboak soilik erabiliko dira.

- *Induktiboak*. *Sin* eta *cos* arrazoi trigonometrikoak definizio inbarianteak dira, hots, triangelu zuzenak dituen angeluen araberakoak dira, baina ez haren neurrien araberakoak. Ikerketa induktibo baten bidez horietara heltzeko, balio taulen tabulazioa erabil daiteke, eta saiakera ugariren ostean kontradibiderik aurkitzen ez bada, emaitza baliozkotzat jotzen da. Prozesu horretan, ezinbestekoa da *adibidetik* haraindi joatea, eta norbere burua konbentzitzeko behar beste saiakera egin behar dira.
- *Deduktiboak*. Hauek ez dira ikasketa prozesu honetan agertuko, hainbat baldintzapen dagoelako horiek aurrera atera ahal izateko, esate baterako, tenporalak, kognitiboak edota instituzionalak. Triangeluen ebazpenari dagozkion gaietan ager daitezkeen argudio deduktiboen artean, ondoko adibide hau izan daiteke horietarik bat: triangelu zuzen bat izanik eta Pitagorasen teorematik abiatuta, $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ erlazio trigonometrikoa deduzitzea.

5.2. Bigarren mailako objektu matematikoak

Bigarren mailan sailkatzen diren objektuak, lehengo mailakoen gainean dauden ikuskerak eta eragiteko formak dira. Objektu hauetako bakoitzean, dualtasun edo dikotomia bat agertzen da. IOSek bereizten dituen 5 dualtasunen artean, 3 erabiliko dira lan honetan (Lasa, 2015, 40), emaitza esperimentalak deskribatzeko: pertsonala / instituzionala, ostentsiboa / ez ostentsiboa, eta estentsiboa / intentsiboa.

- *Pertsonala/instituzionala*. Aztertuko den unitate didaktikoan alde batetik pertsonalak diren objektuak agertuko dira, ikasleek dituzten aurretiko ezagutzak hain zuzen ere. Instituzionalak ordea, ikasleak irakaslearen lanarekin finkatu beharko dituen ezagutzak dira.
- *Ostentsiboa/ez ostentsiboa*. Objektu matematikoak abstraktuak dira, “ideien munduari” dagozkie, nolabait. Horrek esan nahi du ez direla ostentsiboak, eta ez dutela adierazpen edota irudikapen “natural” bat, demagun, biologiako objektu batek izan dezakeen modura. Hala ere, jarduera matematikoa antolatzeko, adierazpen eta irudikapen ostentsiboak erabiltzen ditugu, hau da, publikoak diren errepresentazioak.

– *Estentsiboa/intentsiboa*. Adibidearen eta adierazpen orokorraren arteko aldea nabarmentzen du dualtasun honek. Jarduera matematikoaren baitan erabiltzen diren eta hizkuntzaren jokoan dauden objektuak, partikularrak eta orokorrak izan daitezke. Dualtasun hori bi norabidekoa da, izan ere, adibideetatik kasu orokor bat planteatu daiteke, eta, aldi berean, emaitza orokor batetik kasu partikularrak ondorioztatu daitezke. Prozesu horiek jakintza matematikoaren eraikuntzaren eta aplikazioaren oinarrian daude.

5.3. Software dinamikoa erabiltzeko hiru momentu

Estentsibo / intentsibo eta ostentsibo / ez ostentsibo dualtasunei erreparatuz gero, dualtasun horiek aukera ematen dute ikaskuntza-irakaskuntza prozesuetan buru-hauste ugari dakartzan eztabaida batean bete-betean sartzeko, hori da, adibidearen eta kasu orokorraren arteko talka. Izan ere, jarduera matematikoaren helburuetako bat adibideetatik haraindi joatea da, inbarianteen eta kasu orokorren bila. Prozesu horietan, irakasleak adibide bat aurkez dakieke ikasleei, kasu orokor baten ordezkari gisa, baina, aldiz, gerta daiteke ikasleak adibidea besterik ez ikustea[5].

Ohiko euskarri estatikoekin alderaturik (papera, arbela tradizionala), software dinamikoak zenbait abantaila eskaintzen ditu, saio berean ikasleari aurkezten zaizkion adibideen kopuru handitzen delako, eta adibide horien adierazpen ostentsiboek forma ugari hartzen dituztelako (formula aljebraiko bat, irudi geometriko edo funtzional bat, kalkulu-orriko datuen bilduma bat, e.a.). Horrela, objektu intentsiboen aurkezpena erraztu egiten da, eta objektu horren adierazpen ostentsibo ugari erakusten direnez, ikasleari erraztu egiten zaio adierazpen horien atzean dagoen objektu ez ostentsiboa ulertzeko.

Bigarren Hezkuntzan jarduera matematiko bat aurrera eramateko software dinamikoaren erabilera egokia da hiru momentuetan: esplorazioan, ilustrazioan eta frogapenean.

> "Hiru momentu horietan, adibidearen (estentsiboa) eta klasearen (intentsiboa) arteko dualtasuna nabarmendu behar da; izan ere, orduan onartzen dira objektu geometrikoak egoera mota partikular baten eredu gisa." (Lasa, 2015, 22)

Geometriako software dinamikoa erabiliz, esplorazio-eraikuntzak eraiki daitezke zeinak ordurarte ezagunak ziren eraikuntza geometrikoen propietateak identifikatzen lagunduko duten. Honen helburua da ikasleek eraikuntza manipulatzen doazen heinean propietateak deduzitzea. Normalean, eraikuntza hauek irakasleak diseinatzen ditu edo katalogo batetik aukeratu, (Lasa, 2015, 22:23).

Adibidez, triangelu baten sinua esploratzeko, hipotenusaren eta aurkako aldearen balioak izanik triangelu desberdinak eraiki behar izatea eta bi balio hauen arteko erlazio bat bilatu behar izatea. Metodo induktiboaz baliatuz ondorioak ateratzea.

[5] *Gardentasunaren ilusioa* deitzen zaio fenomeno didaktiko horri.

Azkenik, ikasleek bi balio hauen zatidura angeluaren araberakoa dela ondorioztatuko dute eta balio hori 0 eta 1 artean dagoela.

Bigarren momentua ilustrazio-eraikuntza izango litzateke, zeina software dinamikoarekin ere garatuko den. Honen helburua, aurretik ateratako ondorioak finkatzea eta sendotzea izango litzateke. Modu berea, irakasleak diseinatutako eraikuntza baten gainean lan eginen dute.

Ilustrazio-eredu honen adibide bat, ikasleei tresna informatiko gehiago eskaintzea izanen litzateke. Sinuaren kasuari helduz, kalkulu orrien erabilera paperezko kalkulu guztiak albo batera utziz. Modu honetan, aurretik ateratako ondorioak berrikusten dituzte baina kalkulu aritmetikoetan "denbora galdu" gabe.

Azkenik, frogapen momentua iritsiko da. Arrazoibide induktiboekin hasi eta froga intelektualak eginen dira geroago.

> "Inplementazio informatikoa eta arrazoibide logiko purua batzuetan ez datoz bat. Bi arrazoibide horiek elkartuko dituzten egoerak hautatzea irakaslearen zeregina da; … arrazoibide induktiboa eta … arrazoibide deduktiboa." (Lasa, 2015, 23)

5.4. Triangelu zuzenen ebazpena erreferentziazko testu-liburuan

Lehenik eta behin, aipatzekoa da materialaren hautaketa egiterako orduan kontutan hartu behar dela aniztasuneko klase bat dela eta irakasle aldaketa dela eta, ez da oso argi geratu zein izan den ikasle hauek jasotako ezagutza geometriari dagokionez. Beraz, hainbat material kontrastatu eta gero Biosca, Espinet, Fandos, Ledesma, 2003, liburua erabiltzea erabaki da.

Seigarren gaia landuko da (A. eranskina, 83.orrialdean), baina triangelu zuzenen ebazpenari garrantzia emanen zaio. Beraz, gai honekin lotutako edukia aztertuko da. Unitate honetan lantzen diren ezagutzak berriak dira ikaslearentzat, triangelu zuzenen arrazoi trigonometrikoak, triangelu zuzenen ebazpena, edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak, zirkunferentzia goniometrikoa, arrazoi trigonometrikoen propietate eta erlazioak, e.a. Gainera, bektoreen ezagutzaren inguruan ikasleek lehen zertzeladak jasotzeko prestatua dago unitate didaktiko hau, baina, batez ere triangeluen ebazpenarekin lotutako atala ematen da, modulua, Pitagorasen teoremaren erabilera, e.a.

Hirugarren kapituluan aztertu diren testu liburuen ildoa jarraituz, lehenik eta behin azalpen teorikoak agertzen dira, gero ariketa ebatziak eta azkenik, ikasleari zuzendutako jarduera desberdinak, 1. taulan.

Jardueren analisia egin eta gero, hirugarren kapituluan ikusi den moduan, ez dago ikasleak esploratzera bideratzen dituen jarduerarik, eta gehiengoak trebatze fasean kokatzen dira eta gehiengoa errepikakorra da teknika batzuk menperatzen laguntzeko eta prozedurak mekanikoki ikasteko. Aipatzekoa da gai honetan problemek duten garrantzia, nahiz eta kasu honetan ariketa errepikakor gehiago egon, trigonometria lantzerako orduan problema ugari agertzen dira. Gainera, errealitatearekin erlazioa duten jarduerak dira, eta sakontze fasean gehien agertzen direnak. Azken finean, azken fase honetan aurretik ikasitako guztia martxan jarri behar dute ikasleek jarduera mota hauek ebazteko.

	Esplorazio	Trebatze	Sakontze	Guztira
Ariketak	-	15	2	17
Problemak	-	10	5	15
Galderak	-	2	-	2
Egoerak	-	-	-	-
Guztira	-	27	7	34

44. taula: erreferentziazko unitate didaktikoan agertzen diren jardueren sailkapena.

Beraz, testu liburu hau irakaslearen azalpen magistralera oso bideratuta dago, azalpen teorikoen ondoren jarduerak egiteko eta prozedurak behin eta berriz errepikatuz ikasleen ikasketa prozesuan intziditzeko.

5.5. Jardueraren proposamena eta diseinua

Jarduera oso honen garapenean, ikasleek triangelu zuzenen ebazpena ikastea da helburua. Horretarako, jardueran kontutan hartuko diren hiru aspektu definitu behar dira: (1) *lehen mailako* objektu matematikoen arabera, ikasleek zein teknika erabiliko duten zehaztuko da; (2) *bigarren mailako* objektu matematikoen arabera, zehaztu beharko da irakasleak jokatuko duen rola eta honek ikasleekin dituen interakzioetan landuko dituen prozesuak; eta (3) zehaztu eta diseinatu beharko dira proposamenean erabiliko diren euskarriak, hots, galdetegiak eta eredu dinamikoa.

Lehenik eta behin, jarduera ebazterako orduan ikasleek jarraituko dituzten oinarrizko estrategiak identifikatzea beharrezkoa da. Jarduera matematikoan, ikasleek aktibatu egin beharko dituzte *lehen mailako* objektu matematikoak (5.1 sekzioa), zereginari aurre egiteko. Horretarako, oinarrizko eragiketak erabiliko dituzte (batuketa, kenketa, zatiketa eta biderkaketa) eta argudiatze induktiborako, *saiakera eta errorea* metodoa erabiliko dute behar dituzten ondorioetara iristeko. Eragiketa horiek lengoaia arruntean idatzita egonen dira, baina, lengoaia aljebraiko eta aritmetikoa ere erabili beharko ditu horiei aurre egin ahal izateko.

Zereginaren diseinuan *bigarren mailako* objektuak txertatzerakoan, irakasleak jokatu beharko duen rola zehaztuko da. Honek lotura zuzena du *kontratu pedagogikoarekin*[6] eta *kontratu didaktikoarekin*[7]. Kontratu pedagogikoan zehaztuko dira taldeen egiturari dagozkion erabakiak. Esate baterako, taldearen tamaina neurtu behar da, irakasleak jardueraren garapena kontrolatzeko modukoa izan behar delako, behar diren galdera guztiei erantzuna eman ahal izateko eta ikasleek gustura lan egin ahal izateko.

[6] *Kontratu pedagogikoa:* ikasle eta irakaslearen arteko harremanak kudeatzen ditu, horien artean ez dagoenean ezagutzarekin erlaziorik. (Chevallard Y., Bosch M., Gascón J., 1997)

[7] *Kontratu didaktikoa:* prozesu didaktikoa aurrera doan heinean aldakorrak diren eta ikasketa prozesuarekin erlazioa duten irakasle eta ikasleek dituzten beharren multzoa da. (Chevallard Y., Bosch M., Gascón J., 1997)

Zeregina aniztasuneko talde batean garatuko da, eta taldea bai jarreraz nola ezagutzen aldetik hetereogeneoa denez, horrek talde txikian lan egitera behartzen du. Lan egiterako orduan, ikasleei baloratu egingo zaie lidergo positiboa eta jarrera, eta egindako lanari emango zaio garrantzia. Ikasleek euren aldez aurreko ezagutzak erabili beharko dituzte zereginari aurre egiteko.

Esate baterako, triangeluak izendatzerako orduan, ikasleek haien aurretiko ezagutzak erabiliko dituzte eta izendapen formalaren nozio batzuk izan badituzte ere, nozio edo objektu hauek instituzionalizatzerako orduan irakaslearen eskuhartzea ezinbestekoa izango da (*pertsonala/instituzionala*). Sinuaren eta kosinuaren definizioetara iristeko jardueretan ere, ikasleek euren ezagutza pertsonalak jarri beharko dituzte martxan, lehenengo eta behin, inbariantea aurkitzeko; behin balio erregela aurkitu dutenean, irakasleari dagokio definizioaren balio instituzionalean sakontzea.

Jarduerak aurrera egiten duen heinean, irakasleak kudeatu egin beharko ditu *irudikapenen* gaineko azalpenak, horiek agertu ahala (ostentsiboa/ez ostentsiboa). Izan ere, testu liburuan eta jardueretan triangeluak izendatzeko agertzen diren moduak ugariak dira (grafikoak, sinbolikoak, ahozkoak, kalkulu-orriaren bidezkoak, e.a.), eta horien bidez, adierazpen ez-ostentsibo edo abstraktuagoetara helduko dira ikasleak, adierazpen desberdin hauen arteko erlazioak eginez. Adierazpenen eta irudikapenen aniztasuna eta informazioa adierazpen batetik beste batera “itzuli” behar izateak onurak ekartzen ditu.

Eredu dinamikoen erabilera lagungarri gerta daiteke ikasleei lanaren banaketa “justu” bat proposatzeko. Binaka lan egin beharko dutenez, euskarri biren gainean, ikasleetako batek paperezko galdetegian idazten duen bitartean beste ikasleak eredu dinamikoa manipulatuko du. Ondoren, lekua aldatuko dute. Eredu dinamikoa erabiltzerako orduan, triangelu ugariren adibideak pantailaratu daitezke, eta horien gainean lan egin. Alde batetik, angelu eta alde guztiak definituta dituen triangelu zuzena izanen dugu, eta bestetik, izendapen orokorrarekin agertzen den triangelu zuzen “orokor” bat. Honela, eredu dinamikoak aukera emango dio irakasleari objektu *intentsibo* eta *estentsiboen* arteko bereizketa esplizitatzeko ikasleekin duen interakzioan.

Irakasleak beste zenbait erabaki hartu beharko ditu ere, jarduerako *aldagai didaktikoak*[8] finkatzeko. Erabaki beharko ditu, besteak beste: zenbat argibide emango dizkien ikasleei ariketa planteatzean; taulen egituraketa; zenbat hamartar erabiliko diren kalkuluetan, e.a. Klasearen funtzionamenduari dagozkion erabakiak hartu ondoren, jarduera aurrera eramanen diren euskarriak definituko dira. Aurreko puntuan aipatutako unitate didaktikoa oinarritzat hartuta landuko diren edukien zehaztapena.

[8] *Aldagai didaktikoak:* aldagaia deritzo, irakasleak manipulatu ditzakeen terminoak direlako. (Chevallard Y., Bosch M., Gascón J., 1997)

Lan hau aurrera eraman ahal izateko teknologia berriak erabiliko dira. Aniztasun taldeetan oso ongi funtzionatzen baitute, matematika erakargarriagoa egiten dutelarik. Geogebra softwarea erabiliko da edukia lantzeko, beti ere papera ahaztu gabe. Beraz, bi tresna hauek erabiliko dituzte edukia lantzerakoan.

Lehenik eta behin, software dinamikoaren bidez, kasu honetan Geogebraren bidez, eraikuntza geometriko bat diseinatuko da non aurretik ezagunak dituzten ezagutzak egonen diren baina baita ezagutza berriren bat ere. Honela, ikasleak eraikuntza manipulatuko du eta propietateak ondorioztatuko dituzte. Ondoren ilustrazio fasean, ezagutza hauek barneratu eta tresna berriak eskuragarri izanen dituzte haien lana erraztu ahal izateko. Frogapen faserik ez da egonen kasu honetan:

> "Bigarren Hezkuntzan, hainbat baldintzapen daude, besteak beste, baldintzapen materialak, denborazko baldintzapenak edo ikasleen baldintzapen kognitiboak. Horien eraginez, propietateen frogapen formala alde batera uzteko erabaki didaktikoa har daiteke, eta, kasu horretan, aktibitatea mugatuko litzateke propietatearen ilustrazio-aurkezpen soil batera". (Lasa, 2015, 23)

Triangeluei dagozkien aurre-ezagutzetatik abiatuta, jakintza berriak ikastea da helburua. Horretarako ariketa desberdinak burutuko dira, pausoz-pauso edukia landu ahal izateko.

a. Triangeluen angeluak eta triangeluen izendapena: triangelu baten angeluen batura 180º dela jakitea izanen da helburua. Horretarako GeoGebran diseinatutako ariketekin lan egingo da. Ariketa bat bezala planteatuko da, nahiz eta propietate baten dedukzioa izan, jarduera errepikakorra izanen delako. Horretarako, eredu dinamikoa lehen aipatutako bi faseetan antolatuta egonen da. Lehenengo esplorazio- eta gero ilustrazio- erdua izanen da eginen dutena. Bi fase hauetan ezagutzak esplorazio eta trebatzera bideratutako jarduera izanen da.

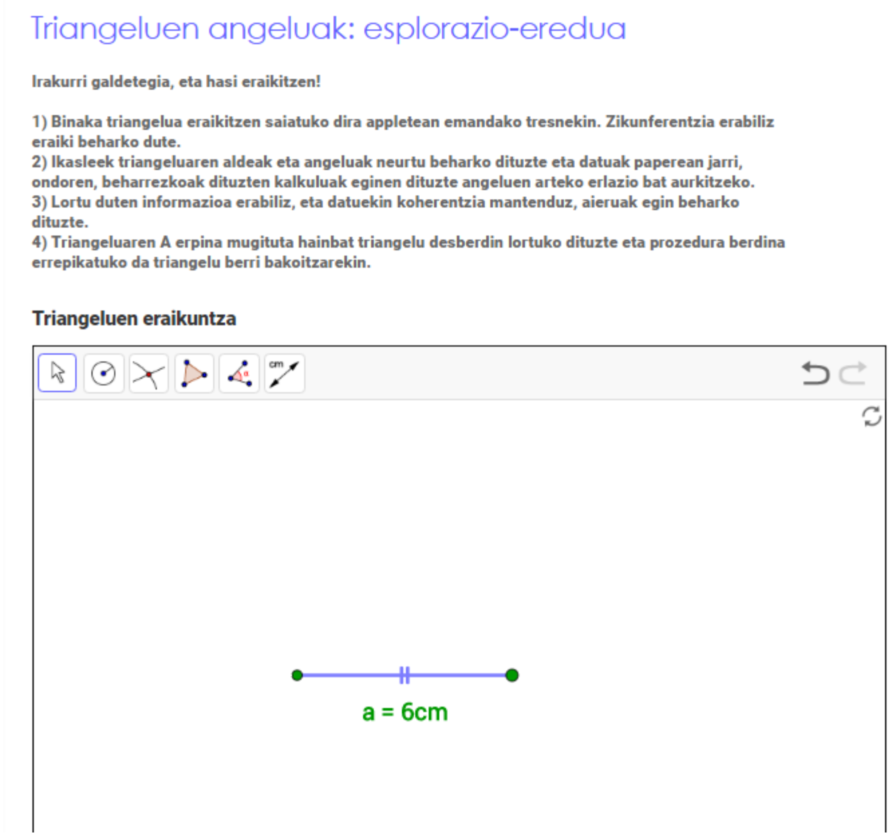
b. Arrazoi trigonometrikoak: triangelu zuzen baten arrazoi trigonometrikoak (sinua, kosinua eta tangentea) ezagutzea izanen da helburua. Berriro ere, ariketa batekin planteatuko da. Kasu honetan ere, eredu dinamikoa aipatutako bi ereduetan (esplorazio- eta ilustrazio-eredua) antolatuta egonen da. Bi fase hauetan ezagutzak esplorazio eta trebatzera bideratutako jarduera izanen da.

c. Triangeluen ebazpena: softwarea erabiliko denez, triangeluen ebazpena ez da zuzenetara bakarrik mugatuko. Triangelu zuzenen ebazpena landuko da, erreferentzia den liburutik ateratako lau metodoak erabiliz:

i. Hipotenusa eta kateto bat emanik
ii. Bi kateto emanik
iii. Hipotenusa eta angelu zorrotz bat emanik
iv. Kateto bat eta angelu zorrotz bat emanik

Lau kasu horiek identifikatzeko eredu dinamiko bat sortuko da, (B Eranskina, 84.orrialdean) baita honi lagunduko dioten galdetegien multzoa (C Eranskina, 109.orrialdean). Aurreko bi galderetan esploratutako nozio berriak lantzen hasiko dira, beraz ezagutza horiek trebatze eta sakontze fase batean sartuko dira.

1. irudian ikusi daitekeen moduan, applet bakoitza idatzizko azalpen batekin lagunduko da. Ikasleak orduan paperezko galdetegia eta azalpen txiki horiekin lan egin beharko dute.



1. irudia: lehenengo galdetegiaren appletak izanen duen itxura.

2. irudian, ilustrazio-ereduan appletak izanen duen itxura agertzen da, ikus daiteke, 1. irudian ez bezala, tresna gehiago agertzen direla, kalkulu orria adibidez. Tresna hauek ilustrazio ereduan soilik agertuko dira. Idatzizko azalpenak aldiz, errepikatzen dira, ikasleek gidoia berriz ikusgai izan dezaten.

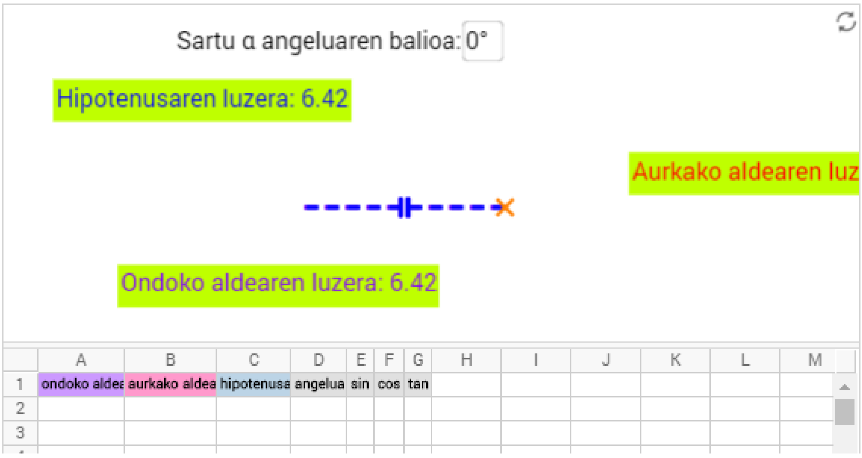
Ikasleak binaka eginen dute lan, eta jarduera honen helburu nagusiena haien kabuz haien aurretiko ezagutzak mugiaraztea denez, irakasleak modu pasiboan parte-hartuko du (posiblea bada). Baina, ilustrazio-ereduarekin hasterakoan, ikasleek dituzten dudak edo zailtasunak argituko dira, hau da irakaslearen ustetan indartu beharreko ezagutzak berriz azalduko dira. Gainera, nozio kultural batzuk ageri dira, triangeluen izendapena adibidez, zeinak klase magistral baten bidez azalduko diren.

Aurreko puntuan azaldu den moduan, 51.orrialdean, talde horretan ez da erabiltzen zentroan dagoen ohiko materiala eta aldez aurretiko ezagutzak zeintzuk diren ezin denez jakin (irakasle aldaketagatik), egokitutako materiala erabiliko da. Material hau egokitzerako orduan hainbat irizpide hartu dira kontutan. Lehenik eta behin, argi ikusi da beste unitate didaktiko batzuetan edukia murrizten zaiela ikasgela honen berezitasuna dela eta.

Ilustrazio-eredua

Behin esplorazio-ereduaekin lan egin ostean, ohartuko zineten nekeza dela eragiketak behin eta berriz errepikatzen ibiltzea. Erabili ezazu eredu hau aurreko esplorazio-ereduetan lortu dituzuen aieruak (ondorioak) egiaztatzeko. Kalkulu-orriak erraztu dezake lan hori, baldin eta datuak egokiro sartzen baldin badizkiogu.

1) A ikasleak angelu zorrotzari dagokion zenbakizko balio bat sartuko du sarrera-kutxan, eta balio hori finko mantenduko da (6) urratsera arte.
2) B ikasleak triangeluko datuak ikuspegi grafikotik jaso eta kalkulu orrian idatziko ditu. Kalkuluak egingo ditu, kalkulu orrian, emandako informazioarekin.
3) Ondoren, A ikasleak puntu laranjaren posizioa aldatuko du, tira eginez, eta triangeluaren oinarriaren luzera aldatuko du eta datuak jasoko dira ere.
4) Ikasleek euren txandak trukatuko dituzte. B ikasleak puntu laranjaren posizio berria aukeratuko du (angelua aldatu gabe, sarrera-kutxa joana baita oraingoz), eta A ikasleak kalkulu berriak egingo ditu kalkulu orrian. Ikasleek (2), (3) eta (4) urratsak errepikatuko dituzte, zenbait alditan.
5) Lorturiko informazioa baliatuz, eta datuekin koherentzia mantenduz, ikasleek euren aieruak egiaztatuko dituzte.
6) B ikasleak "angelu berria" botoia sakatuko du, eta ikasleak berriz hasiko dira (1) pausotik aurrera, angelu berri batekin.
7) Prozesua zenbait triangelurekin errepikatu ostean, ikasleek berriro ere ondorio eta aieruak atera beharko dituzte, hori bai lorturiko datuekin koherentzia mantenduz.



2. irudia: arrazoi trigonometrikoak lantzeko ilustrazio-ereduaren appletak izanen duen itxura.

Bigarrenik, esplorazio-eredua garrantzizkoa ikusten da, ikasleek euren ikasketa prozesuan edukiak modu iraunkorrago batean asimilatzeko balio duelako eta gainera, buruari eragiteko eta aurreko ezagutzak bergogoratzeko balio dielako. Irizpide honi, denboraren aferak eragin handia eginen dio, esplorazio prozesu hau aurrera eraman ahal izateko ikasleek era autonomo batean lan egin behar dutelako.

Beraz, bi “muga” edo irizpide hauek kontutan harturik, erabaki da edukiari baino, ikasleen ikasketa prozesuari garrantzia emanen zaiola. Hortaz, triangelu zuzenen ebazpena egiteko beharrezkoak diren nozioak soilik landuko direla. Modu honetan, edukia murrizteaz gain, aldez aurretik irakasle “ofizialak” planifikatutako ordutegian prozesu berri hau txertatzeko aukera egonen da.

6. Kapitulua

Esperimentazioa

Hurrengo orrialdeetan, triangelu zuzenen ebazpena lantzeko ikaskuntza-irakaskuntza prozesu bat aztertuko da, DBH4ko aniztasuneko ikasleekin. Lehenik eta behin, jardueraren faseak azalduko dira, eta ondoren aztertuko dira prozesuan aurreikusi daitezkeen *zailtasunak* eta horien jatorrian egon daitezkeen *oztopoak* (Chevallard, Bosch eta Gascón, 1997, 224: 225). Hauek kontutan izanda, azaldu egingo dira esperimentazioaren emaitzak, emaitzen azterketa eta ateratako ondorioak.

6.1. Jardueraren faseak

Lehenengo eta behin, esperimentazioa aurrera eramateko egin den aldez aurreko planifikazioa aurkeztuko da (45. taulan laburpen bat aurkezten da). Kontutan hartzekoa da saio guztietan irakaslearen eskuhartzeak minimoa izan behar duela.

Lehenengo saioko (C Eranskina, 109.orrialdean) hasierako 15 minutuetan lan-bikoteak zehaztuko dira (irakasleak zehaztuta) eta aurkezpen txikia eginen da, non azalduko diren edukiak, metodologia eta zein softwarerekin lan egingo den. Hurrengo 35 minutuetan "Triangeluen angeluak, esplorazio-eredua" ariketa aurrera eramango da, horretarako galdetegia altuan irakurriko da eta agertu daitezkeen dudak argituko dira. Ondoren, ikasleak esplorazio-ereduan murgilduko dira eta binaka egingo dute lan. Lehenengo galdetegia erantzun beharko dute eta bigarrenarekin hasi.

Saioa	Nondik norakoak
1	Metodologia, eduki eta software dinamikoaren aurkezpena. Edukien lanketaren hasiera, lehenengo galdetegia, triangeluen angeluen esplorazio-eredua.
2	Lehenengo galdetegia, triangeluen angeluen esplorazio-eredua amaitu eta bigarrenarekin hasi, triangeluen angeluen ilustrazio-eredua. Arbelean azalpen motz batzuk eginen dira, triangeluen izendapenaren nozioa azaltzeko.
3	Bigarren galdetegiarekin jarraituko da. Bikote bakoitzak bere erritmoa eramanez.
4 5 6	Arrazoi trigonometrikoen lanketarekin hasiko da. Hirugarren galdetegia, sinuaren esplorazio-eredua. Kosinunaren esplorazio-eredua, laugarren galdetegia. Tangentearen esplorazio-eredua, bostgarren galdetegia. Bikote bakoitzak bere erritmora lan eginen du.
7 8	Aurreko hiru saioetan landu dena bergogorau eta beharrezkoa bada arbelean azalpen txiki bat eginen da eta formulak idatziko dira. Arrazoi trigonometrikoei dagokion ilustrazio-ereduaren lanketa, seigarren galdetegia.
9 10	Triangeluen ebazpenari dagokion galdetegia landuko da. Kasu honetan banaka eginen dute lan, aurreko saioetako edukia denon artean komunean jarriko dugu eta beharrezkoa dena arbelean idatziko da.

45. taula: saio desberdinetan egiteko aurreikusten denaren laburpena.

Bigarren saio osoa lehenengo galdetegia amaitzeko erabiliko da. Gainera, lehen esan bezala, bikote baten batek amaituta badu bigarren edo/eta hirugarrenarekin hasteko aukera izanen du. Lehenengo saioan jarraitutako dinamika berdina izanen da, galdetegia irakurri, dudak argitu, baina bikote bakoitza bere erritmoan.

Hirugarren saioan, angeluen ariketarekin jarraituko da, baina kasu honetan ilustrazio-ereduarekin. Berriz ere galdetegia ozenean irakurriko (C Eranskina, 109.orrialdean) da eta aurreko egunean landutako galdetegiaren berdina izango denez (bakarrik software dinamikoko tresnak aldatuko dira), errepaso bat eginen da aurreko saioko galdetegia euskarri izanda. Gainera, triangeluen izendapenaren ezagutza kulturala izanik, azalpen magistrala eginen da ezagutza hau trinkotzeko.

Laugarrenean, ezagutza berria landuko da, arrazoi trigonometrikoak (C Eranskina, 109.orrialdean). Sinuaren esplorazio-eredua aurrera eramanen da, horretarako, aurreko saioetan jarraitutako pausu berdinak segituko dira: galdetegiaren irakurketa, egon daitezkeen duden argitzea eta bikoteka lan egitea.

Bostgarren eta seigarren saioetan arrazoi trigonometrikoak lantzen jarraituko da, kasu honetan cosinu eta tangentearena (C Eranskina, 109.orrialdean). Horretarako aurreko saioan egin den prozedura berdina jarraituko da.

Zazpigarren eta zortzigarren saioan, arrazoi trigonometrikoei dagokien ilustrazio-eredua aurrera eramatea aurreikusten da. Hiru arrazoi trigonometrikoek ilustrazio-eredu berdina izanen dute (C Eranskina, 109.orrialdean), hau da, neurriek beraiek aukeratu beharko dituzte. Horretarako, errepaso bat egitea komenigarri ikusten da, behintzat formulak argiago ikus ditzaten.

Bederatzigarren eta hamargarren saioetarako (jarraituak izatea hobe) ariketa berezi bat aurreikusten da. Banaka eginen dute ariketa, nahiz eta haien artean hitz egiteko aukera izanen duten, ez baita azterketa bat izanen. Baina, triangelu zuzenen ebazpenari lotutako ilustrazio-ereduko jarduera izanen da (C Eranskina, 109.orrialdean). Horretarako aurretik azaldutako prozedura berdina erabiliko da. Gainera, dudak badituzte irakaslea galdetzeko aukera izanen dute ere.

6.2. Aurreikusitako zailtasunak, oztopoak eta horien jatorri posibleak

Ikasleak aztertuta, edukiarengana izan ditzaketen zailtasunak hiru kategoriatan sailka daitezke: arlo soziologikoan, arlo pedagogikoan eta arlo didaktikoan. Guzmánek (2001, 44:81) hiru multzotan sailkatzen ditu: *kulturalak*, *afektiboak* eta *kognitiboak*. Jatorri kulturaleko blokeoek arlo soziologikoarekin zuzeneko erlazioa dute, jatorri afektiboa dutenek arlo pedagogikoarekin, eta kognitiboek didaktikoarekin. Nahiz eta arloka banatuko diren, argi dago haien artean konexioak daudela, azken finean, jarrera, harremanak, zentroaren antolaketa eta edukiek bata besteari eragiten diote.

Lehenik eta behin, *arlo soziologikoari* dagozkionak aztertuko dira, zeinetan ikasleek ikasketa prozesuarekiko jarrera kontutan hartuko den eta haien kideekiko eta irakaslearekiko erlazioan izan ditzaketen zailtasun agertuko diren. Aniztasun taldeetan ohikoa da ikasketekiko batere interesik ez duten ikasleak aurkitzea. Are, talde bakar batean "pilatu" egiten dira tipologia anitzeko ikasleak (zaku berean sartuz, esate baterako, familiako arazoak dituen ikasle bat, droga menpekotasun arazoa duen beste bat, eta bere adinarekiko garapen kognitibo motela duen bat), lotura komun batekin: ikasketetan ez dituzte jarraitzen euren ikaskideen ohiko erritmoak. Honela, ikasle hauek jasotzen duten mezu inplizitua honako hau da, "zuen izaera eta egoera pertsonalak oso diferenteak dira, baina hemen zaudete ikasketetan gaizki zoaztelako zuek denak", eta mezu horrek *blokeo kultural* egoeran uzten ditu ikasleak: argi eman zaie aditzera ez dutela “ikasteko balio” (Guzmán, 2001, 76:81).

Taldearen egitura soziologikoari erreparatuz eta ikasleek dituzten jarrerak aztertuta, hainbat zailtasun egon daitezkeela aurreikusten da, ikasleen jarrera disruptiboarekin erlazioa dutenak. Ikasle askok klasera faltatzeko ohitura dutela esan daiteke, askotan huts egiten baitute, gainera, klasean batzuetan sortzen den giroa ez da egokia lan egiteko eta oso erraz galtzen dute arreta. Gainera, haien arteko erlazioak zailak dira. Beraz, bikoteak eta taldeak ongi konfiguratu behar dira lan egiterako orduan, hor ere beste zailtasun bat sor daitekeelako. Baina, bakarkako lana bidaliko zaienean ere, giro ona mantentzen saiatu beharko da, bestela, lehen aipatu den moduan, arreta galtzeko aukerak egon daitezke.

Emozioak, gure bizitza espiritualeko motorra eta barrera nagusiak dira, eta horregatik, gure bizitza intelektualarena ere (Guzmán, 2001, 44). Lehenik eta behin, ikasketa prozesu berri baten aurrean egonik, hastearen beldurra eta gogo ezarekin topatzea posible izango da. Gainera irakaslearen “kolaborazio” maila bajuak ere ez du alde honetan lagunduko, azken finean, matematiketan alderantzizko lana egiten ohi da, lehenik teoria irakatsi eta gero ariketak egin.

Ikasle hauek antsietatea ere ager dezakete (Guzmán, 2001, 56). Egungo gizartean lehiakortasunak duen garrantzia ikusita eta prozesu hau luzea dela ikusita, azkar amaitzearen nahia agertu daiteke ikasleen artean. Bestalde, emaitzarik lortu ez badute, azken minutuetan ez dute aktibitaterik erakutsiko. Oro har, aurreikusten dute arrakastarik ez dutela izango, eta horregatik, lanari ez diote garrantziarik emango.

Emozioekin lotutako azkeneko blokeoa, nazka izan daiteke. Lehenengoarekin zuzenean erlazionatu daiteke, hasteko esfortzurik egiten ez bada, inoiz ez dira ondo egiteko gaituta sentituko. Gainera, ez badiote jarduerari zentzurik topatzen “nazka” sentsazio hori ere handituz joanen da.

Bigarren lekuan izango ditugu *arlo pedagogikoarekin* erlazionatuta blokeoak, eta horiek eskolaren antolaketarekin erlazionatutakoak izanen dira. Arlo honetan agertu daitekeen lehenengo zailtasuna materialarekin dauka zerikusia. Zaila da aniztasunerako ikasgela batentzako materiala prestatua aurkitzea. Kasu honetan, testu liburuekin zailtasun bat ager daiteke ez dituztelako erabiltzen. Hau da, fitxekin lan egiten dute eta ez dago oinarrizko materialik edukiak lantzeko. Gainera, honekin zuzeneko erlazioa dauka klase honek duela gutxi izan duen irakasle aldaketak. Beraz, ikasleek dituzten aurretiko jakintzak ez dira ezagutzen. Irakasleak beraz, aurreko kurtsoetako materiala ikusirik eta suposizioak eginez diseinatu beharko du talde honentzako materiala.

Azkenik, *arlo didaktikoan* ager daitezkeenak aipatuko dira. Kasu honetan, ikasleek dituzten aurretiko ezagutzak kontutan hartuta, eduki berriarenganako ikasketa prozesuan matematikekin erlazionatutako zailtasunak agertuko dira. Blokeo kognitiboak dira hauek, errazago identifikatu daitezke eta hauen trataeran irakasleek ohitura handiagoa dute. Kasu honetan, blokeoak bi faseetan agertzen direla esan daiteke: *problemaren antzematean* eta *problemaren jardunean* (Guzmán, 2001,64:65). Blokeo horiek problema desglosatzean agertu daitezke. Jarduera irakurri eta taulak diseinatzen hastean, gerta daiteke ikasleek ez jakitea zein eta zenbat informazio jarri behar duten. Gainera, jarduerari aurre egiterako momentuan, blokeo emozional eta kognitiboak elkarrekin agertu daitezke.

Funtsean, hainbat zailtasun konkretu ager daitezke. Alde batetik, aurretik landutako edukiarekin erlazionatutakoak. Batez ere edukia ez gogoratzea, hala nola, triangeluen sailkapena angeluekiko edo aldeekiko eta Pitagorasen teoremaren formula. Bestetik, ezagutza kulturalak, triangelu baten izendapena adibidez, aldeen izendapena, erpinen izendapena eta angeluen izendapena. Gainera, momentuan informazioaren trataerarekiko zailtasunak ere ager daitezke, batetik, arrazoi trigonometrikoen erabilera ez ulertzea edota, taulak osatu behar dituztenean islatu beharreko informazioaren hautaketa egiten ez jakitea. Azkenik, algebrarekin erlazionatutako zailtasunak ere ager daitezke, batez ere ekuazioen ebazpenarekin lotutakoak, azken finean, ikasle hauek era murritz batean landu dituzte gai guztiak, beraz, oraindik ere, dudak eta zailtasunak ager daitezke.

Blokeo egoera horiekin batera, *kontratu didaktikoarekin* harremana izango duten beste hainbat zailtasun agertu daitezke. Azken batez, ikasle hauek ohituta daude *imitazio* edo *erreprodukzio formaleko* kontratu didaktikoaren (Brousseau, 1997) arabera lan egiten matematikako klasean. Honela, ikasleek erakuts dezateke “emaitza zuzena bilatzearen obsesioa”, hau da, blokeo bat eragin dezakeen eta matematika jarduera bera ondora dezakeen obsesio bat. Ikasketa prozesu honetan, lortuko diren emaitzek ez dute berebiziko garrantzirik, aldiz, prozesuak hartuko du pisurik gehien. Horretarako, ikasleak onartu egin beharko du lan egiteko modu berria.

Imitazio edo erreprodukzio formaleko kontratuan, irakasleak, normalean, formula aljebraiko “politak” erabiliz abiatzen du bere diskurtsoa, edota formula aljebraiko sintetiko batean laburbiltzen du bere emaitza. Honela, ikasleak ere agertzen du aljebrarekiko *joera lehenetsi* hori. Azken batez, ikasleak uste du irakasleak aljebra bakarrik ebaluatuko diola, eta horren atzetik ibiliko da beti, bestelako adierazpen edo argudioak albo batera utziz. Beraz, ikasleei ariketa matematiko batean “zerbait” bilatu behar dutela esatean, eredu aljebraiko bat bilatzeari ekiten diote (Lasa, 2016). Eredu dinamikoekin lehenengoz lan egiterakoan, aljebrarekiko joera lehenetsi hori are nabarmenago gelditzen da, ikasleak uste baitu ereduarekin landutakoa ez zaiola baloratuko. Ikasketa prozesuaren aldaketak, beraz, blokeo kognitibo bat eragiteaz gain, lengoaia ezberdinak erabiltzera behartzen du ikaslea.

Kontratu didaktikoaren eraginez, beraz, ikasleari ikusarazten zaio aljebrak berebiziko garrantzia duela, eta irudi luke beste ezer ez zaiolako ebaluatuko. Hori horrela izanik ere, DBHn lantzen hasten den aljebrarekin ikasleak zailtasunak izango dituela aurreikusten da, metodo aritmetikotik lengoaia aljebraikora pasatzerakoan *oztopoak* agertzen direlako. Lehen Hezkuntzatik, prozedura aritmetikoak oso ongi menperatzen dituzte ikasleek. Prozedura aljebraikoetara salto egiterakoan, aritmetikan erabiltzen zituzten metodo berdinak erreproduzitzen dituzte, nahiz eta kasu batzuetan balio ez duten eta akatsak ekartzen dituzten. Batetik bestera salto egiteko prozesua lau mailatan sailkatzen da: 0 aljebra-mailan, prozedura aritmetikoak soilik erabiltzen dira; 1 eta 2 aljebra-mailetan, aldagaiak erabiltzen hasten dira, egiturazko jardueretan edota balio ezezagunak adierazteko; 3 aljebra-mailan, manipulazio aljebraikoak kontsolidatu egiten dira (Godino et al, 2016).

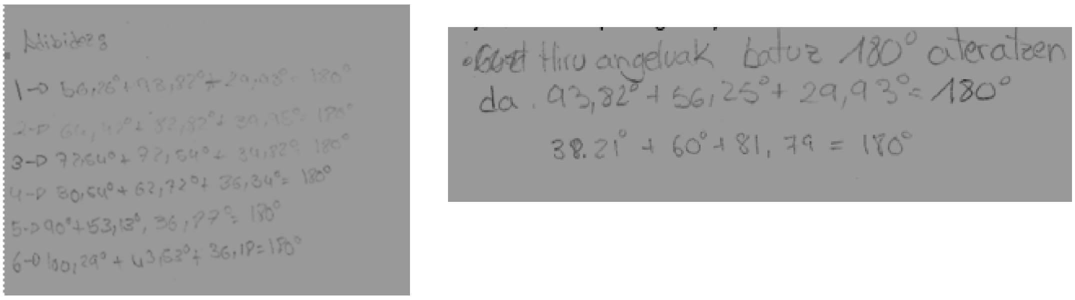
Curriculumaren eta testu liburuen azterketa egin denean, nabarmen gelditu da triangeluen ebazpenerako jarduera gehienak trebakuntza ariketak direla. Gainera, ariketa horietan, triangeluen aldeen luzerak zenbaki naturalen arabera ematen dira. Hau da, nahiz eta ikasleak hainbat zenbaki-multzo ezagutzen dituen, hala nola zenbaki naturalak, osoak eta arrazionalak, proposatzen zaizkien ariketetan zenbaki osoak edo naturalak erabiltzen dira kalkuluak errazteko. Joera horrek zenbaki arrazional eta hamartarren erabilera baztertzera eramaten du, eta ondorioz, ikasleek arazoak dituzte koefiziente arrazionalekin edo horien garapen hamartarrekin eragiketak egiteko (Lasa, 2016).

6.3. Emaitzak

Lehenengo saioan (bi ordutakoa), bikoteak egin dira irakasleak erabakita. Bikote heterogeneoak izan dira, ikasle bakoitzaren ibilbide akademikoa kontutan hartuz. Modu honetan, batak besteari laguntza eskaini ahalko dio eta bikoteko bi kideek lan egin ahalko dute. Edukiak, metodologia eta software dinamikoaren aurkezpen txiki bat egin da. Gainera, ikasleekin adostu da bikote bakoitzak kalkulagailu bat eduki ahal izatea. Ondoren, galdetegiak banatu dira (C Eranskina, 109.orrialdean) eta ozenean irakurri dira. Agertu diren dudak argitu eta bikoteka lanean jarri dira.

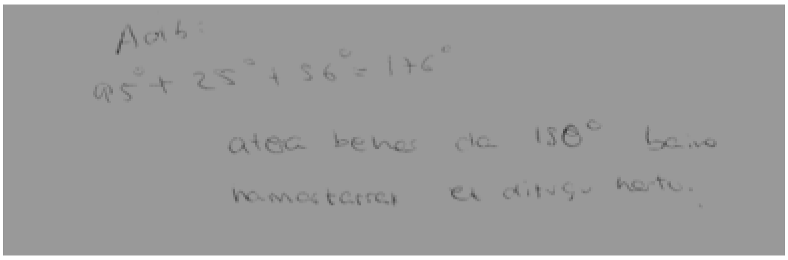
Ekintzan murgildu direnean sortu dira arazoak. Lehenik eta behin, triangeluaren eraikuntzari dagokionez, softwarea erabiltzen ez dakitela esanez blokeo egoera batean egon dira bikote batzuk. Beraz, irakaslearen eskusartzea ezinbestekoa izan da jarduera berbideratzeko eta gako batzuk ematea beharrezkoa ikusi da. Berriz bidea hartuta, bikote batek eraikuntza amaitzean beste bikoteekin komunikazioa sortu da, laguntza edo balioztatze prozesua emateko. Argi ikusi da ikasle batzuek ez dutela prozesua ulertu ikusi duten arte. Ikasleek egin duten lana 119.orrialdean eskuragarri dago.

Aipagarria da, lehenengo galdetegiaren amaieran, angeluen arteko erlazioa bilatu behar izan dutenean, eta erlazio hau benetakoa dela frogatu, frogapen induktiboaren bitartez, ikasleen emaitza desberdina izan da 3. irudian ikusi daitekeen moduan.



3. irudia: frogapena egiteko ikasle batek eragiketa asko egin ditu eta besteak ordea bi.

Gainera, angeluen batuketa egiterakoan, kalkulu akatsak ere egon dira. Zenbaki hamartarrak kontutan hartu ez direlako. Hau da, angeluen balioa bakarrik zenbaki osoaren bitartez adierazia izan da, ikus 4. irudia.



4. irudia: kalkulua hamartarrak kontutan hartu gabe.

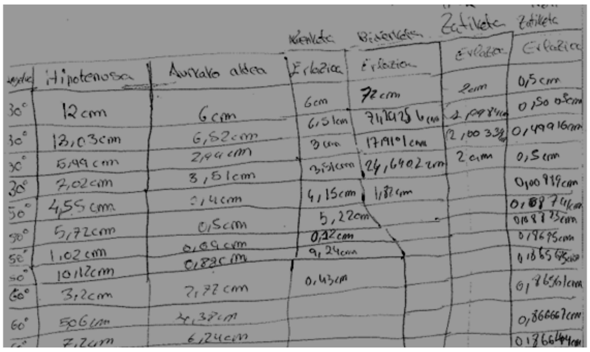
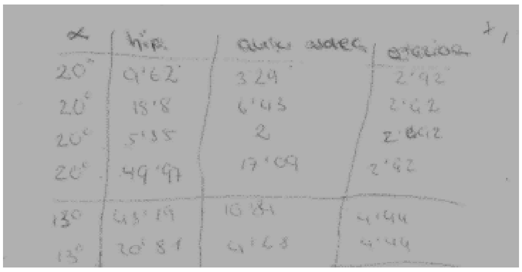
Bost minututako atseden txiki bat egin da tartean, ikasleek airea hartzeko eta buruak piska bat freskatzeko. Galdetegian aurreratu ahala, taula egiterako orduan, aurkezteko modua zehaztu behar izan da arbelean. Denen artean taula eredu bat egin da guztiek pausu berdinak jarraitzeko. Gainera, aztertu beharreko triangelu kopurua ere zehaztu egin da.

Bukatzeko, aurreikusita zegoen lehenengo galdetegia amaitu eta bigarrena hasi behar zutela, baina ez da hala izan. Lehenengo galdetegia egiteko ordu bat eta erdi baino gehiago egon dira lanean eta klaseko azkeneko 15 minutuetan haien klasera bueltatu eta ebaluazio metodoari buruz hitz egiteko probestu da. Modu honetan, irakaslea eta ikasleen artean ebaluatzeko erabiliko diren tresnak adostu dira, ikasleen parte-hartzearekin batera.

Bigarren saioan (ordu batekoa), ilustrazio-ereduaren galdetegia(C Eranskina, 109.orrialdean) erantzun dute ikasleek. Kasu honetan berriz ere aurreko saioko galdetegiaren berdina denez hau gogora ekarri da eta berriz ozenean irakurri da. Ikasleek izan ahal dituzten dudak argitu dira, hala nola, kalkuluen orriaren erabilera, horretarako azalpen motz bat eman da. Gainera, triangeluen izendapenen ezagutza instituzionalizatu egin da, azalpen magistral baten bidez, honela, ikasleek bete behar dituzten taulak berregituratu dituzte. Ikasleak lanean jarri dira eta galdetegiak ordu batean bete dituzte. Lanean egon diren bitartean, haien artean hitz egin dute askatasun osoz. Ikasleek egin duten lana 121.orrialdean ikusgarri dago.

Hirugarren saioan (bi ordutakoa), ezagutza berri baten lanketa eginen da: arrazoi trigonometrikoena. Berriz ere galdetegiak banatu (C Eranskina, 109.orrialdean) ozenean irakurri eta dudak argitu dira. Ikasleak lanean hasi aurretik taulen egituraketa denen artean adostua izan da. Bi ordu egon dira galdetegi honen erantzunak garatzen. Nahiz eta horrela aurreikusia ez egon esplorazio ereduari garrantzia emanez lanean aritzeko aukera eman zaie. Esan beharra dago, saio honetako moteltasuna frustrazioaren eragina izan dela. *Erlazioa* bilatu behar dutenez, blokeatu egin dira eta askok lan egiteko gogoa galdu, azken finean, ez daude holako prozesuetara ohituta. Normalean, matematika arloan lehenengo erlazioa aurkezten zaie eta gero ariketak. Ikasleek egin duten lan guztia, 130.orrialdean ikusgai dago. Baina aipatzekoa da, *erlazioa* bilatu behar izan dutenean, agertu diren zailtasun eta frustrazioak ez direla lehenengo galdetegian izan baizik eta esploraziorako jarduera guztietan.

Saio honetan aipatzekoa da ikasleen lanerako duten jarreraren maila desberdinak. Ebaluazio irizpideak adostuak izan arren, ikasle batzuek besteek baino esfortzu handiagoa egin dute esplorazio ereduetan, 5. irudian ikus daitekeen moduan.

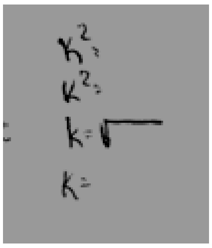
5. irudia: bi ikasleek egindako taula desberdinak.

Laugarren saioan (ordu batekoa), arrazoi trigonometrikoekin jarraitu da, kasu honetan cosinua eta tangentearekin. Horretarako, berriz ere galdetegiak banatu (C Eranskina, 109.orrialdean), ozen irakurri eta ikasleak lanean hasi dira. Bi saioetarako aurreikusia zegoen prozesua saio bakar batean amaitu dute. Prozedura ezaguna zenez eta metodologia berdina azkartasuna garatu dute. Ikasleek egin duten lana: 130.orrialdean.

Bostgarren saioan (bi ordutakoa), arrazoi trigonometrikoen ilustrazio-eredua aurrera eraman da. Horretarako berriro ere galdetegia banatu da (C Eranskina, 109.orrialdean), ozenean irakurri eta dudak argitu. Hasi aurretik, nahiz eta ikasle batzuek behar ez izan, errepaso orokor bat egin da. Horretarako ikasle bat arbelera atera eta sinuaren, cosinuaren eta tangentearen formulak idatzi ditu. Gainera, kalkulu orriaren erabileraren errepasoa egin da. Bi ordu hauetan, ikasleak lanean ibili dira, aurreko galdetegiaren berdina izan denez erabili behar dituzten metodoak ezagunak ziren eta galdetegia amaituta entregatu dute amaieran. Ikasleek egin duten lana, 155.orrialdean.

Seigarren saioan (bi ordutakoa), triangelu zuzenen ebazpena gai izanen duen jarduera ebazteko izanen dira. Horretarako, gelaren antolaketa aldatu egin da. Banaka jarri dira ikasleak, baina bakoitza bere bikotearen ondoan, hitz egiteko aukera izanen dutelako. Galdetegia banatu da (C Eranskina, 109.orrialdean), ozenean irakurri eta dudak argitu. Denen artean aurreko saioetako ezagutzak errepasatu eta arbelean eskema bat egin dute, gainera, Pitagorasen teorema bergogoratu behar izan dute irakaslearen eskutik. Gero ikasle bakoitza lanean jarri da. Saio honetan, banaka lan eginez, ikusi da nola batzuengan frustrazioak eragin handiagoa duen banaka daudenean. Honek galdetegi batzuk txurian entregatzea eragin du. Bestalde, beste batzuek esfortzu handia egin dute galdetegiaren parte handi bat erantzuteko. Saio honetan gertatu dena izan da, ikasle gehienek dudak izanik, zaila izan dela guztiengana hurbiltzea. Ikasleek egin duten lan guztia 162.orrialdean ikusi daiteke.

Azken jarduera honetan, hainbat zailtasun agertu dira ikasleek kalkuluak egiten zituztelarik. Aljebrarekin erlazionatutako arazoak hain zuzen ere, lehenengo mailako ekuazioen ebazpena kostatu egiten zaie. Pauso asko egiten dituzte eta batzuetan ez dakite nola jarraitu behar duten, 6. irudia.



6. irudia: adierazpen aljebraikoekin arazoak.

6.4. Emaitzen eztabaida

Argi ikus daiteke jardueraren faseak ez direla modu zurrun batean eta zehatz mehatz aurreikusia zegoen moduan aurrera eraman. Irakaslearen parte-hartzea beharrezkoa izan da momentu oro, zereginaren nondik norakoak bideratzeko. Hori horrela izan da, alde batetik, ikasleen lanerako gogoa ez delako egunero berdina izan, eta bestetik, jarduerek aurreikusitakoa baino denbora gehiago behar duteko batzuetan. Honek agerian utzi du eredu dinamikoekin *esplorazio-momentuak* lantzerakoan taldearen *tempoa* errespetatu behar dela.

IOSean oinarritutako ikasketa prozesu honetan, irakaslearen papera kanpoan dago, behaketan hain zuzen ere. Baina kasu honetan, agian ikasleak horrelako prozesuetara ohituta ez daudelako, irakaslearen eskusartzea nahi zena baino handiagoa izan da. Ikasleen blokeoak handiak izan direnez, batez ere softwarearekiko distantzia markatu izan dute. Inoiz ez dutenez holakorik erabili, ez dakitela erabiltzen esaten dute. Hau gertatzen da, aurreikusi den moduan, jarduera berari baino tresnari garrantzi handiagoa ematen zaiolako.

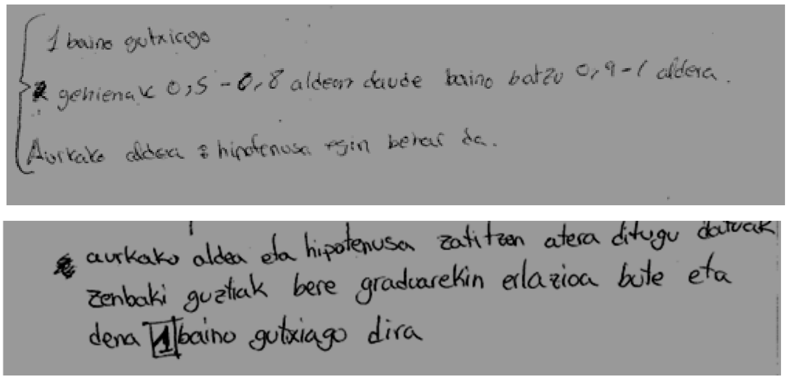
Imitaziozko kontratu didaktikora ohituta dagoen ikasle taldeari eskatu zaio jardueran rol aktibo bat har dezan, eta horrek talka kognitibo bat eragiten dio ikasleari. Jarduera irakurtzean eta taulen diseinua egiterakoan ikasleak ez daki datuen antolaketa nola egin ere, eta irakasleak modu aktiboago batean esku-hartu behar izan du honelako blokeo kognitiboei aurre egiteko. Hau gertatu da, hain zuzen ere, *kontratu didaktikoa* apurtu delako, non matematika irakasteko metodorik hedatuena den *azalpena-eredua-ariketa* eskema ez den jarraitu.

Galdetegi bakoitzaren amaieran, lortutako datuen arteko erlazio bat bilatzea eskatu zaie ikasleei. Honen bidez, irakaslearen helburua da ikasleak berak egin dezala lortu dituen datuen azterketa, eta datuen gainean ezagunak zaizkion eragiketak aplikatuz triangelu desberdinek komunean dutena ondorioztatzea. Aipatu den modura, matematika lantzeko modu tradizionalean, proposizio edo teorema bat aurkezten zaie ikasleei, eta ondoren, ariketa sinpleak egiten dituzte emaitza hori aplikatuz. Jarduera atzekoz aurrera planteatzen denean, ikasleek prozedura induktiboak aktibatu behar dituzte eta ohitura faltagatik, baliabiderik gabe egongo balira bezala aurkitzen dute haien burua, *kontratu didaktikoaren* apurketa ematen baita.

Emaitzetan ikus daiteke *aljebraren ikuspuntu lehenetsiak* duen eragina. Matematikaren irakaskuntzan aljebra estereotipatuak hainbesteko garrantzia duenez, eta hainbeste datu eskuera edukita, ikasleek uste dute eredu aljebraiko bat deduzitu behar dutela. Hau da, ikasleek aljebraren ikuspuntu “distortsionatua” dute, eta ez dute ikusten *aritmetika orokortu* baten gisa, baizik eta formula estereotipatuen bilduma baten gisa. Hori horrela, eta datu ugari izanda ere, prozedura induktibo baten bidez sinuaren edo kosinuaren definizioak objektu aljebraiko gisa identifikatzeko arazoak dituzte. Hau da, ikasleari metodo grafiko edo eredu dinamiko bat aurkezten zaionean, ohikoan prozedura aljebraiko baten bidez ondorioak ateratzea eskatzen zaionez, hori da bere buruak lan egiteko erabiltzen duen prozedura.

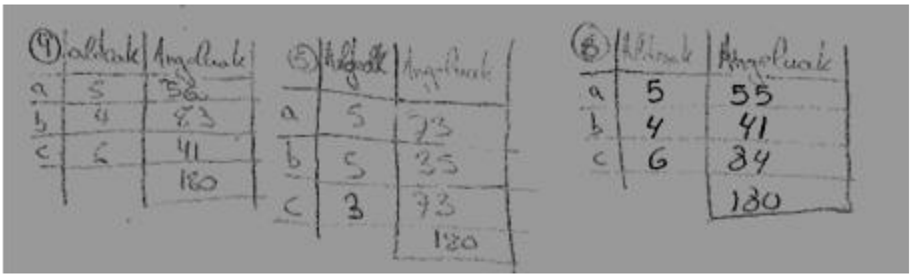
Saioen deskribapenean esan bezala, ikasle batzuek frogapen induktiboa alde batera utzi dute, baita triangeluen angeluen batuketa 180 gradukoa dela frogatu behar izan dutenean ere. Batzuek bospasei triangelu erabili dituzte, beste batzuk ordea bat edo birekin konformatu dira. Esan daiteke azken ikasle horiek ez dituztela ezberdintzen *adibidea* eta *argudio induktiboa*. Paradoxa bat dirudien arren, DBHko ikasleek ezagutu beharko lituzkete argudio induktiboak, LHn horiek lantzen direlako, gehien bat, kontradibideen bilaketan. Hala ere, DBHn haustura bat gertatzen dela dirudi: lan egiteko aurreko moldeak kolpetik baztertuz, teoria azaltzen zaie lehenik ondoren hura ariketa sinpleetan aplikatzeko. Honela, ikasleek ez dituzte gehiago prozedura induktiboak erabiltzen, nahiz eta prozedura deduktiboak urrun gelditzen zaizkien.

Esplorazio fase batean argudio induktiboek arrakasta dutenean, ikasleek ondorio desberdinak ateratzen dituzte, datuen arabera. Adibidez, sinuaren azterketa egin dutenean, ikasleek aukeratu dituzten angeluen arabera goi- eta behe-borne ezberdinak lortu dituzte: kasu guztietan aukeratu dituzten angeluak 30 gradu baino handiagoak izan dira, baina angeluen artean zenbat eta ezberdintasun handiagoak egon, orduan eta borne hobeak eman dituzte (7. irudia). Kasu honetan, esplorazio eredu bati dagozkion ondorioak izanik, borne batek zein besteak arrakasta adierazten dute eskolako jarduera matematikoaren ikuspegitik.



7. irudia: argudio induktiboetatik ateratako bi ondorio desberdin.

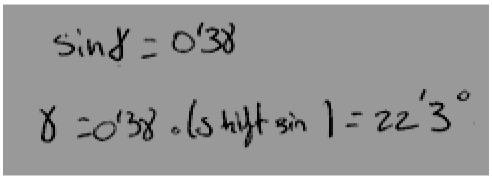
Lehen mailako objektuekin jarraituz, definizioekin lotura zuzena izan duen oztopo nagusia zenbakien erabilera izan da. Ikasleek zenbaki naturalak, osoak eta arrazionalak lantzen dituzte DBH osoan zehar, baina 6.2 sekzioan aurreratu den moduan, ikasleei proposatzen zaizkien jarduera aljebraikoen koefizienteetan eta emaitzetan zenbaki osoak lehenesten dira. Honela, ikasleak ezagutzen ditu zenbaki arrazionalak baina horiek erabiltzeko erresistentzia garatzen du, “normalean” erabiltzen ez direla sinestarazi zaiolako; hau da, klasean landutako jardueretan normalean zenbaki osoak agertzen direlako, eta ondorioz ikasleek ez diete zenbaki hamartarrei behar bezalako garrantzia ematen, 4. irudian ikusi den moduan. Beste adibide batzuetan argi ikusten da ere, triangeluen aldeak definitu behar dituztenean beti zenbaki osoak erabiltzen dituztela (8. irudia).



8. irudia: zenbaki osoen erabilera.

Ikasleek zenbaki hamartarrak erabiltzen ez dituztenez, horiekin lan egiterakoan kalkulu akatsak egiten dituzte. Edonola ere, esplorazio-ereduan kalkulu akats gehiago daude ilustrazio-ereduan baino. Hau gertatu da, bigarren kasuan teknologia berrien laguntza zuzena izan dutelako, hau da, haiek bakarrik datuen transkripzioa egin behar izan dutelako.

Beste zailtasun batzuek euren jatorria dute elementu linguistiko kodifikatuen eta prozedura aljebraikoen erabileran. Arrazoi trigonometriko ezagunetatik angeluaren balioa ondorioztatu behar denean, ikasleek ez dituzte ezagutzen sinuaren eta kosinuaren alderantzizkoen idazkerak, eta honenbestez, kalkulagailuak berak duen hizkuntza baliatzen dute egindako kalkuluak azaltzeko (9. irudia). Horrekin batera, akats edo zailtasun kognitibo txikiak ere antzeman dira lehen mailako ekuazioen ebazpenean, lengoaiari dagokionez. Nahiz eta ikasle hauek ekuazioen ebazpena hilabete bat lehenago landuta izan, *x*ren lekuan *sin* edo bestelako adierazpen bat agertuz gero, ez dute aurrera jarraitzen. Egoera horiek nabarmen uzten dute prozedura aljebraikoak gainerako eduki geometriko, funtzional eta estatistikoekin integratzeko beharra. Curriculumak dioen modura, eduki aljebraikoak asistentzialak dira, eta modu atomizatuan lantzen direnean, eraginkortasuna galtzen dute.



9. irudia: hizkuntza berriarekin sortutako zailtasunak.

Aniztasun taldeetan, ikasleen mugako tipologiak elkartzen dira. Honela, talde estandarretan berezkoa den aniztasuna are nabarmenagoa da aniztasun taldeetan. Esperimentazio honetan, ikasleek bikoteka eta banaka egin dute lan. Bada, ikasle batek jarrera kontraesankorrak erakutsi ditu modalitate batean zein besteak lan egiterakoan.

Bikoteka lan egiterakoan gidaria izan da, eta ahaleginak eta bi egin ditu jardueran bikote suertatu zaionari laguntzeko, nolabait, hura ez kaltetzeko. Aldiz, bakarka lan egiterakoan ez du inolako ahaleginik egin eta galdetegia txurian entregatu du. Jarrera ezberdin horien zergatia jakitea zaila den arren, zeren faktore askok eragin bait dezakete horrelako jarrera batean, horiek izan daitezke sozialak edota psikologikoak.

Azkenik, DBH4ko aniztasun taldeetan, talde estandarretan bezalaxe, eta ia kurtso amaieran egonik, ikasleek gauza bakar bat izaten dute buruan: ikasturtea amaitu egingo dela, eta seguruenera, ez direla inoiz gehiago ikastetxe horretara itzuliko. Ikasleen egoera psikologiko horrek erabat baldintzatzen ditu hemen azaldu diren emaitzak.

7. Kapitulua

Sintesia, ondorioak eta galdera berriak

7.1. Sintesia

Lan honetan geometriako blokean agertzen diren edukiak landu dira, eta konkretuki, triangelu zuzenen ebazpena. Ardatz gisa harturik triangelu zuzenak eta trigonometria, curriculumean eta testu liburuetan eduki horiek nola lantzen diren eta nola ebaluatzen diren aztertu da. Zehazki, jarduera desberdinen klasifikazioa ere egin da.

Hasierako azterketa horretatik abiatuz, eta IOSeko tresna teorikoak baliatuz, DBH4ko aniztasuneko ikasgela batentzako beharrezkoak diren tresnak sortu dira, tresna horiekin ikasketa prozesu bat diseinatzeko. Horretarako, geometriako software dinamikoarekin eraikitako esplorazio- eta ilustrazio-ereduak erabili dira, eta *ad hoc* eginiko paperezko galdetegiak. Jardueraren diseinua eta emaitzen analisia egiteko, ikasleen eta hauek izan ditzaketen zailtasun aurreikuspena egin da, eta zailtasun horien jatorrian dauden oztopoak aztertu dira, hiru arlo desberdinetan: soziologikoa, pedagogikoa eta didaktikoa.

Azkenik, prozesu hau esperimentaziora eraman da eta baloratu eta aztertu dira bertan efektiboki agertu diren zailtasun eta oztopoak erreproduzitu diren edo ez. Horiek kontuan hartuz, etorkizunera begirako hobekuntza posibleak aurkeztuko dira galdera irekien gisa.

7.2. Lanaren ondorio orokorrak

Lanaren diseinuaren fasean, kurtso bereko bi testu liburu desberdinen azterketa egin da (3 eta 5 kapituluak), eta testu liburu horietan agertzen diren jardueren tipologia aztertu da taula banatan. Taula horien alderaketa eginez jardueren arteko konparaketa egin da. Bi testu liburuetan lantzen diren jardueren tipologia eta faseak oso antzekoak direla ikus daiteke **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** eta **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**n. Testu liburu batetik bestera aldaketa handirik ez dagoenez, ikasketa prozesuak ere antzekoak behar dute izan. Abiapuntu horrek justifikatzen du zergatik egin den lan honetan eredu dinamikoen erabileraren aldeko hautua, ikasleei testuliburuetan agertzen ez diren esplorazio-ereduak aurkezteko. Hau da, jarduera matematikoa baldintzatzen duena ez da testu liburu baten edo beste baten erabilera, baizik eta euskarria bera: “arkatza eta papera”, edota “eredu dinamikoa”.

DBH4	ANAYA-HARITZA	GILTZA
Ariketak	%48.2	%50
Problemak	%37.6	%44
Galderak	%14.2	%6
Egoerak	%0	%0

46. taula: jarduera motak DBH4ko bi testu liburuetan.

DBH4	ANAYA-HARITZA	GILTZA
Esplorazio	%3.5	%0
Trebatze	%69.5	%79.4
Sakontze	%27	%20.6

47. taula: jarduera motak DBH4ko bi testu liburuetan.

Diseinuan eta esperimentazioan egin den modura, ateratako ondorioak hiru dimentsiotan sailka daitezke: soziologikoan, pedagogikoan eta didaktikoan. Honela, gizarteari loturiko aspektu orokorrenetatik abiatuta, ikaslearen eta ezagutza matematikoaren arteko loturara helduko gara, ikastetxearen eta ikasgelaren antolaketaren aspektuetatik pasatuz.

- *Arlo soziologikoa*. Aniztasuneko taldeetan ikasleak elkartzen dituen ezaugarri komuna da ikasketetan ez doazela ongi. Hala ere, ezaugarri horien jatorriak anitzak dira, eta funtsean ikasle bakoitzaren egoera pertsonala ezberdina da. Horrek hasierako motibazioan negatiboki eragiten duen arren, eredu dinamikoekin taldean lan egiterakoan ikasleen lorpenak agerikoagoak dira. Honela, hasierako motibazio falta irauli da. Aniztasuneko ikasgeletako ikasleak, normalean, erdi mailako gradu bat ikastera joanen dira hurrengo kurtsoan, eta beharrezkoa da eskasa den motibazio hau berraktibatzea.
- *Arlo pedagogikoa*. Aniztasuneko taldeetan ikasleek bikoteka lan egin behar dutenean, ezinbestekoa da bikote horiek ongi konfiguratzea, euren lan egiteko motibazioan zuzenki eragiten duelako lan giro egokia sortuz. Nahiz eta bikoteak ongi konfiguratuta egon, banaka lan egin dutenean jarrerek okerrera egin dute. Horren atzean dago ikasle bakoitzaren autopertzepzioa: euren buruaren alde lan egiteko adorerik ez dute, merezi ez duelakoan; baina lagunari ez diote kalterik egin nahi. Bigarren aspektu batek espazioarekin eta zentroarekin zuzeneko erlazioa du. Teknologia berrien eta software dinamikoaren erabilerak espazio aldaketa eta klasearen antolaketa ezberdina dakar, eta honek positiboki eragin die. Haien artean hitz egin dezakete, ordenagailua erabili, interneta eskuragarri dute eta klasez aldatzen dira. Horrekin batera, ebaluazioa akordio baten bidez egin da, eta horrek oso emaitza positiboak ekarri ditu, ikasleak jardueran zentratu direlako azterketaren presio edo zama hori gainetik kenduz.
- *Arlo didaktikoa*. Hasiera batean ikasleek programa menderatzen ez zuten arren, klasez klase geroz eta hobeto moldatu dira. Softwarearen manipulazioarekin izan dituzten zalantzek isla izan dute argudiatzerakoan, esplorazio-ereduei loturiko prozedura induktiboak erabiltzera, eta dituzten aurre ezagutzak baliatuz euren kabuz ondorioak ateratzera ez daudelako ohituta. Horrek, azken batean, talka kognitibo bat eragiten die, eta psikologikoki eragiten die gai direla ikusten duten arte. Hau da, ikasleek esploraziorako duten beharra agerian gelditu da.

  Honekin batera, irakaslearen eskusartzea murritzagoa denez, kontratu didaktiko tradizionalaren apurketa bat dago. *Imitazio* edo *erreprodukzio formaleko* kontratutan, ikasleek errepikatu behar dituzte irakasleak egindako prozedurak, hau da, lehenik teoria azaltzen da, gero ariketa ebatziak egiten dira eta azkenik, ikaslea lanean hasten da aurretik ikusitako guztia errepikatuz. Aldiz, software dinamikoarekin lan egiterakoan, ikasleari exijitzen zaio bere kabuz lan egin dezan eta erabakiak har ditzan. Beraz, esplorazio-momentuen kudeaketan, klasearen *tempoa* errespetatu behar da, eta honek talka egiten du egungo hezkuntza sistemarekin, unitate didaktiko bakoitzean landu beharreko orduak esleituta baitaude. Esplorazio momentuen kudeaketak arriskua ere badakar, gerta baitaiteke jardueraren helburuak ez betetzea, eta arrakasta-ezaren beldurrez, irakasleak esku-hartzea erabaki dezake, ikasleei zuzenean erantzuna emanez (*Topaze* efektua, Brousseau, 2007, 75). Esplorazio-jarduera guztietan kudeatu behar da *ziurgabetasunaren kontrola*, eta irakasleak ez duenean zuzenean eta behin eta berriz esku-hartzen, ikasleak ez du "ikasten ari denaren" sentsazioa; hala ere, jardueraren saio guztiak amaitu direnean, orduan ohartu dira ikasleak benetan ikasitakoaz, azkeneko ariketan argi demostratu dutelako gaitasunak bereganatu dituztela eta triangelu zuzenen ebazpenerako beharrezkoak diren tresnak erabiltzen dakizkitela.

Laburbilduz, argi geratu da matematikako ikaskuntza-irakaskuntza prozesua antolatzeko bi eredu nagusi daudela: alde batetik *erreprodukzio formaleko kontratu didaktikoaren* erabilera eta bestetik, *esplorazio-ereduetan* oinarritutakoa.

7.3. Galdera berriak

Lan honen helburuak eta ondorioak amaiturik, lan honetan erantzun gabe gelditu diren eta etorkizunera begira erantzun beharreko galdera berriak sortu dira. Esate baterako:

Ikusirik gaur egun Bigarren Hezkuntzako Zentroetan aniztasuneko taldeetan landu beharreko edukiak murrizten direla, baina baliabide eta metodologiak aldatu gabe; egin al daiteke talde horien egokitzapena metodologiak egokituz?

Ikusirik testu liburuen egitura ez dela argitaletxearen araberakoa, eta horietan prozedura zehatzetan trebatzeko ariketak direla nagusi; zein paperezko baliabide erabili beharko litzateke Bigarren Hezkuntzako Ikastetxeetan, edukien behar bezalako integrazioa ziurtatzeko? Egun institutuetan erabiltzen den materiala oinarri hartuta moldaketa bat egitea posiblea izango litzateke?

Ikusirik esplorazio-ereduak triangelu zuzenak aztertzeko euskarri baliagarriak direla; nola erabili daitezke eredu dinamiko horiek geometriako gainerako edukiak lantzeko eta geometrikoak ez diren bestelako eduki-blokeetan? Nolako denboraren kudeaketa egin behar da prozesuei garrantzia emateko eta ez edukien transmisioari?

Conclusiones

En la fase de diseño que se ha llevado a cabo en este trabajo, se han analizado dos libros de texto (capitulo 3 y 5), y se han clasificado las actividades dependiendo de su tipología. Se ha hecho una comparación, en las tablas 46 y 47 y se ha deducido que las actividades propuestas son muy similares en cuanto a su tipología y fase. Ya que no hay gran diferencia de un libro a otro, los procesos de estudio serán muy parecidos. Este punto de partida justifica el porqué de utilizar los modelos dinámicos y de presentar a los alumnos el modelo de exploración que no aparece en los libros de texto. Es decir, la utilización de un libro u otro no es la que condiciona la actividad matemática, sino el soporte en sí: “el lápiz y el papel” y/o “el modelo dinámico”.

Como se ha hecho en los capítulos anteriores de diseño y experimentación, las conclusiones se van a catalogar en tres dimensiones: sociológica, pedagógica y didáctica. De esta manera, se comenzará por los aspectos más generales ligados a la sociedad, después pasaremos por la organización del aula y del centro y finalmente se hablará sobre el alumnado y la relación con el conocimiento matemático.

- *Dimensión sociológica.* La característica común que une al alumnado de diversificación es que no van bien en los estudios. Aun así, el origen de éstas son diversos, en resumidas cuentas la situación de cada alumno o alumna es personal. Al principio, esto puede afectar negativamente en la motivación conjunta, aunque al empezar a trabajar en grupo van poniéndose en manifiesto los logros del alumnado. De este modo se ha dado la vuelta a la falta de motivación.
- *Dimensión pedagógica.* En las aulas de diversificación en el momento en el que se va a trabajar por parejas es necesario que estén bien configuradas, ya que esto afectará directamente en su motivación y en el ambiente de trabajo. Aunque estas parejas estuviesen bien configuradas, al trabajar individualmente las actitudes han ido empeorando. Detrás de esto se puede decir que esta la autopercepción de cada alumno o alumna. Aparece también otro segundo aspecto ligado al espacio y al cetro. Al utilizar las nuevas tecnologías y el software dinámico se ha cambiado de espacio y de organización de la clase, éstos dos aspectos han tenido una influencia positiva en el alumnado. Han podido hablar entre ellos y ellas, han utilizado ordenadores, tenían a mano internet y han cambiado de clase. Además, la evaluación se ha acordado entre profesora-alumnado y esto ha traido unos resultados positivos.
- *Dimensión didáctica.* Aunque en un principio los y las alumnas no dominaban el programa, durante las siguientes sesiones se han amoldado a él. Estas dudas que han surgido de la manipulación del programa se han reflejado a la hora de argumentar, a la hora de utilizar procesos inductivos relacionados con los modelos de exploración, ya que no están acostumbrados ni acostumbradas a deducir conclusiones utilizando sus propios conocimientos. Por tanto, esto les ha creado un choque cognitivo, y psicológicamente les afecta hasta que se ven

capaces de avanzar. Por tanto, se ve la necesidad de los alumnos y alumnas a utilizar modelos de exploración.

Al mismo tiempo, hay una ruptura del contrato didáctico tradicional en el momento en el que, en este caso, la profesora no interviene de forma tan directa. En el contrato de *reproducción formal* o *imitación* el alumnado repite los procesos que lleva a cabo el o la docente, es decir, primero se explica la teoría, luego se hacen diversos ejercicios resueltos y finalmente el o la alumna empieza a trabajar reproduciendo todo lo que ha visto anteriormente. Trabajando con el software dinámico en cambio, se le hace una exigencia al alumnado: que trabaje por su cuenta y que tome decisiones. Por tanto, el *tempo* de la clase hay que respetarlo cuando se habla de la gestión de los modelos de exploración; esto chocará directamente con el sistema de educación de hoy en día. Esta gestión también trae consigo diversos riesgos, como por ejemplo no cumplir con el objetivo de la actividad, y con el miedo a no tener éxito, que el o la docente decida guiar la clase, dando al alumnado la respuesta correcta. En todas las actividades de exploración hay que gestionar el *control de la incertidumbre,* ya que cuando el o la docente no se integra en el proceso el alumnado puede tener la sensación de "no aprender"; aun y todo, en las últimas sesiones, los y las alumnas se han dado cuenta que se han apropiado de los conocimientos necesarios para la resolución de triángulos rectángulos y que saben utilizar diversas herramientas.

Resumiendo, se ha deducido que hay dos modelos principales para organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: por un lado el uso de la *reproducción formal del contrato didáctico* y por otro, el que se basa en los *modelos de exploración.*

Taula eta irudien aurkibideak

Taulen aurkibidea

Irudien aurkibidea

Erreferentziak

Biosca A., Espinet M.J., Fandos M.J., Ledesma O. (2003). *Matematika 4, giltza DBH.* Giltza-Edebe.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Zorzal.

Chevallard Y., Bosch M., Gascón J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Colera J., Gaztelu I. (2008). *Matematika 2.* Anaya-Haritza.

Colera J., Oliveira M.J., Gaztelu I., Martinez M. (2008a). *Matematika 4, B aukera.* Anaya-Haritza.

―――――― (2008b). *Matematika 4, A aukera.* Anaya-Haritza.

Colera J., Oliveira M.J., García R., Santaella E. (2008). *Batxilergoa 1, Matematika I.* Anaya-Haritza.

Colera J., Oliveira M.J., (2009). *Batxilergoa 2, Matematika II.* Anaya-Haritza.

Godino J. D., Font V., Wilhelmi M. R. (2006) *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (Berezia), 131-155.

Godino, J.D., Wilhelmi, M.R., Neto, T., Aké, L., Contreras, A., Estepa, A., Lasa, A. (2016). Algebraization levels in primary, middle and high school mathematics. 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, 24-31 July 2016.

Guzmán M. (2004). *Para pensar mejor.* Pirámide.

Lasa A. (2015). *Jarduera matematikoa eredu dinamikoen laguntzaz.* Bilbo, UEU.

Lasa A. (2016). *Instrumentación del medio material GeoGebra e idoneidad didáctica en procesos de resolución de sistemas de ecuaciones*. Iruñea: NUP.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006) << Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102.>> Boletín Oficial del Estado (BOE).

―――――― (2007a) << Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. BOE 5, de 5 enero, 677–773.>> Boletín Oficial del Estado (BOE).

―――――― (2007b) << MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre. BOE 293, de 8 diciembre, 43053–43102.>> Boletín Oficial del Estado (BOE).

Nafarroako Foru Komunitatea (NFK) (2007c) <<24/2007 FORU DEKRETUA, martxoaren 19koa>> Nafarroako Buletin Ofizialean (NBO).

―――――― (2007d) <<53/2007 FORU AGINDUA, maiatzaren 23koa>> Nafarroako Buletin Ofizialean (NBO).

———————— (2008) <<66/2008 FORU AGINDUA, maiatzaren 14koa>> Nafarroako Buletin Ofizialean (NBO).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2016ko apirilaren 10ean ikusia). Principios y estándares para la educación matemática. http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/archivos/RE_NCTM.pdf

Ocaña JM., Romero R., Mejía D. (2015). *3 DBH. Matematika akademikoa.* Ibaizabal DBH. 3. liburukia.

Eranskinak

A. Testu liburuko Unitate Didaktikoa

B. Eredu dinamikoa

C. Galdetegiak

D. Triangeluen angeluak, esplorazio-eredua

E. Triangeluen angeluak, ilustrazio-eredua

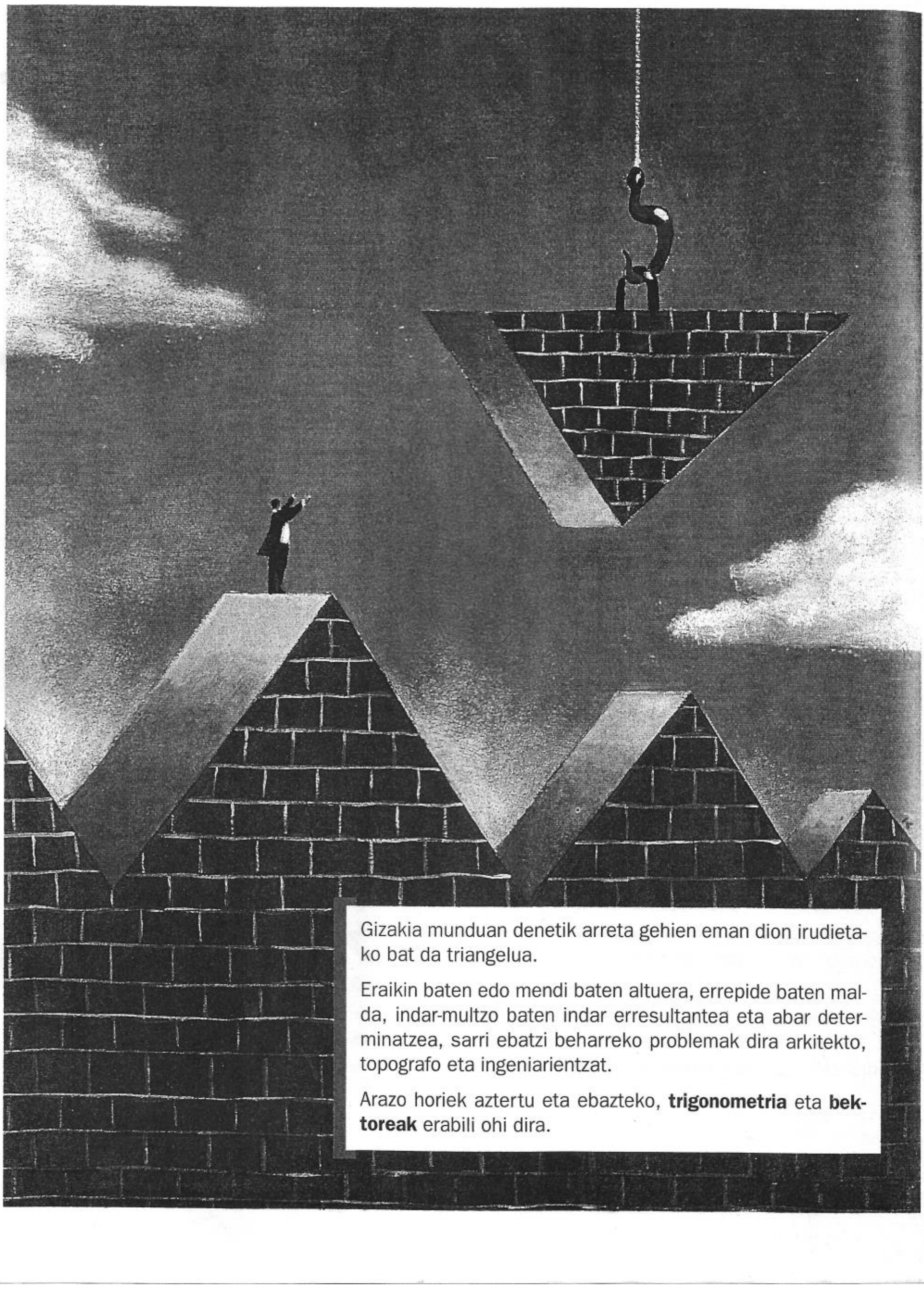
F. Arrazio trigonometrikoak, esplorazio-eredua

G. Arrazio trigonometrikoak, ilustrazio-eredua

H. Triangelu zuzenen ebazpena, ilustrazio-eredua

A. Testu liburuko Unitate Didaktikoa

6 Planoko geometria



Gizakia munduan denetik arreta gehien eman dion irudietako bat da triangelua.

Eraikin baten edo mendi baten altuera, errepide baten malda, indar-multzo baten indar erresultantea eta abar determinatzea, sarri ebatzi beharreko problemak dira arkitekto, topografo eta ingeniarientzat.

Arazo horiek aztertu eta ebazteko, **trigonometria** eta **bektoreak** erabili ohi dira.

Hona hemen galderak...

- Posible ote da triangelu zuzen baten aldeak eta angeluak elkarrekin erlazionatzea?
- Nola determina dezakegu mendi baten edo eraikin baten altuera?
- Nola adieraz daitezke abiadura edo indarra bezalako magnitudeak?

Erantzuna aurkitzeko...

Honako hauek gogoratu behar dituzu:

- Angelua zer den.
- Pitagoras-en teorema.
- Triangeluen arteko antzekotasun-irizpideak.

Azkenean, hauxe lortuko duzu:

- Edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak zein diren jakitea, baita angelu beraren edo angelu desberdinen artean ezartzen diren arrazoi trigonometrikoak ere.
- Arrazoi trigonometrikoen eta bektoreen arteko kalkuluak eskatzen dituzten problemak ebaztea.

Unitatearen eskema

Planoko geometria

- **Trigonometria**
  - *Angelu zorrotzen arrazoi trigonometrikoak*
  - *Angelu orientatuak*
  - *Arrazoi trigonometrikoen propietateak eta erlazioak*
- **Bektoreak**
  - *Planoko bektoreak*
  - *Bektoreen arteko eragiketak*
  - *V_2-ren oinarriak*

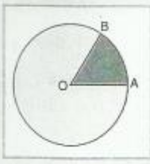
Trigonometria

- *Angelu zorrotzen arrazoi trigonometrikoak*
- *Angelu orientatuak*
- *Arrazoi trigonometrikoen propietateak eta erlazioak*

Adi!

SI sisteman, angeluak neurtzeko unitatea radiana da (rad).

Hauxe da radian bat: zirkunferentzia batean erradioaren luzerako arkua hartzen duen angelu zentrala.



Zirkunferentziaren luzera $2\pi r$ denez, zirkunferentziak 2π aldiz dauka erradioaren luzera. Beraz:

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

Baliokidetza horri esker, graduak radian bihurtu edo alderantziz egin dezakegu, honako adibide hauetan erakusten den moduan:

$$45° = 45\cancel{°} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360\cancel{°}} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\frac{5\pi}{12} \text{ rad} = \frac{5\pi}{12} \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{360°}{2\pi \cancel{\text{rad}}} = 75°$$

KALKULAGAILUA

Kalkulagailu zientifikoek tekla bereziak dituzte angeluen arrazoi trigonometrikoak kalkulatzeko.

Esate baterako, sin 53° 15' kalkulatu nahi badugu, honelaxe tekleatuko dugu:

sin **5** **3** **°'"** **1** **5** **°'"** **EXE**

Pantailan hauxe agertuko da:

0.8012538

Hortaz, sin 53° 15' = 0,801.

Kosinua edo tangentea kalkulatzeko, sinuari dagokion tekla sakatu ordez kosinuari edo tangenteari dagokiona sakatuko dugu.

Halaber, arrazoi trigonometrikoak jakinez gero, angeluaren balioa lor dezakegu. Adibidez, sin α = 0,75 bada, hauxe tekleatuko dugu:

INV **sin** **0** **•** **7** **5** **EXE**

Pantailan hauxe agertuko da:

48.590378

Beraz, 48,590° angeluaren sinuak 0,75 balio du.

Hasi aurretik...

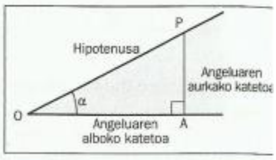
- Adierazi 35° 17′ 26″ era bakunean segundotan eta adierazi 32 046″ era konplexuan.

Aurreko mailetan ikasi dugu nola erlaziona daitezkeen triangeluen alde en luzerak, triangelu zuzenen erlazio metrikoetatik eta antzekotasun-e lazioetatik abiaturik.

Trigonometriak ahalbidetu egingo digu triangelu baten aldeen luzera bere angeluen zabalerekin erlazionatzea.

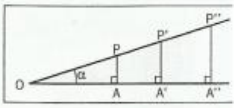
Angelu zorrotzen arrazoi trigonometrikoak

Aztertu arretaz eskuinaldeko irudiko *OAP* triangelu zuzenean adierazitako α angelu zorrotza. Triangelu horren edozein bi alderen luzeren arteko zatidurei α-ren **arrazoi trigonometrikoak** deritze.



Sinua	Kosinua	Tangentea
α angeluaren **aurkako katetoa**ren eta **hipotenusa**ren luzeren arteko **arrazoia**ri α angeluaren **sinua** deritzo eta **sin** α idazten da.	α angeluaren **alboko katetoa**ren eta **hipotenusa**ren luzeren arteko **arrazoia**ri α angeluaren **kosinua** deritzo eta **cos** α idazten da.	α angeluaren **aurkako katetoa**ren eta **alboko katetoa**ren luzeren arteko **arrazoia**ri α angeluaren **tangentea** deritzo eta **tg** α idazten da.
$\sin\alpha = \frac{AP}{OP}$	$\cos\alpha = \frac{OA}{OP}$	$\text{tg}\,\alpha = \frac{AP}{OA}$

Hartu orain eskuinaldeko irudiko *OA′P′* eta *OA″P″* triangeluak. Biak dira *OAP*-ren antzekoak, triangelu zuzenak baitira eta α angelu komuna baitute.



Orduan, α angeluaren aurkako katetoaren eta hipotenusaren luzeren a teko arrazoia berbera da hiru triangeluen kasuan, hau da:

$$\frac{AP}{OP} = \frac{A'P'}{OP'} = \frac{A''P''}{OP''} = \sin\alpha$$

Beraz, α angeluaren sinua independentea da aukeratutako triangeluare kiko. Ikus dezakezunez, gauza bera gertatzen da kosinuarekin eta ta gentearekin.

Kontuan izan angeluen arrazoi trigonometrikoak adimentsionalak direla bi luzeren arteko zatidura modura definitzen baitira.

Gainera, angelu zorrotzen kasuan **alderantzizko arrazoi trigonometrik ak** defini daitezke.

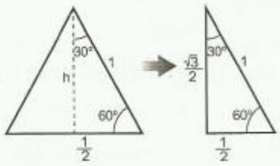
Kosekantea	Sekantea	Kotangentea
$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$	$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

30°, 45° eta 60°-ko angeluen arrazoi trigonometrikoak

Hiru angelu zorrotzen arrazoi trigonometrikoak eraiketa geometriko errazetatik lor daitezke. Hain zuzen, 30°, 45° eta 60°-ko angeluak dira.

30° eta 60°-ko angeluen arrazoi trigonometrikoak

Kontsidera dezagun luzera unitateko aldeak dituen triangelu ekilateroa. Altuerak bi triangelu zuzen berdinetan zatitzen du, triangelu horien angelu zorrotzak 30° eta 60°-koak izanik.



Triangeluetako batean Pitagoras-en teorema aplikatuko dugu *h*-ren balioa lortzeko.

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Beraz, honakoak dira 30°-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak:

$$\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Eta 60°-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak, honako hauek:

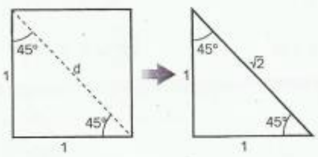
$$\sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

45°-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak

Kontsidera dezagun luzera unitateko aldeak dituen karratua. Diagonalak bi triangelu zuzenetan zatitzen du karratua, triangelu horien angelu zorrotzak 45°-koak izanik.



Pitagoras-en teorema aplikatuko dugu triangeluetako batean *d*-ren balioa lortzeko:

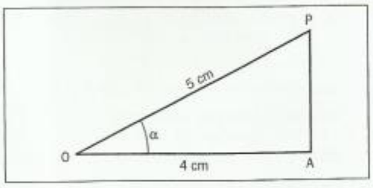
$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Beraz, 45°-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak hauexek dira:

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{tg } 45° = \frac{1}{1} = 1$$

1. adibidea

Adierazi alboko irudiko α angeluaren arrazoi trigonometrikoak.



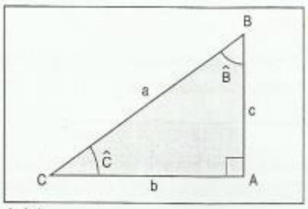
AP aldearen neurria kalkulatuko dugu: $AP = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$ $\quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$ $\quad \text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$

$\text{cosec } \alpha = \frac{5}{3}$ $\quad \sec \alpha = \frac{5}{4}$ $\quad \text{cotg } \alpha = \frac{4}{3}$

Jarduerak

1. Triangelu zuzen baten katetoak 6 cm eta 8 cm luze dira.
   Kalkula itzazu horien angelu zorrotzen arrazoi trigonometrikoak.
2. Egin ezazu triangelu zuzen bat, jakinik angelu zorrotzetako baten tangenteak $\frac{3}{2}$ balio duela.



1. ird.

Triangelu zuzenak nola ebatzi

Behin triangelu zuzen baten alde edo angelu batzuk ezagutuz gero, Pit goras-en teoremak eta arrazoi trigonometrikoek ahalbidetu egingo digu gainerakoak lortzea, hau da, triangelua ebaztea.

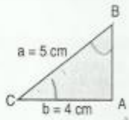
Taulan laburbildu dira triangelu zuzenak ebazteko orduan gerta daitezk en kasuak.

Datuak eta ezezagunak 1. irudiari dagozkio.

Lehenengo kasua: Hipotenusa eta kateto bat emanik

Datuak	Ezezagunak	Formulak
a	c	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$
b	$\hat{B}$	$\sin \hat{B} = \frac{b}{a}$
	$\hat{C}$	$\cos \hat{C} = \frac{b}{a}$

Ebatzi 5 cm-ko hipotenusa eta 4 cm-ko kateto bat dituen triangelu zuzena.



Datuak: a = 5 cm eta b = 4 cm.
c, $\hat{B}$ eta $\hat{C}$ kalkulatu behar ditugu:

$$c = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = \mathbf{3\ cm}$$

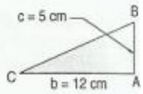
$$\sin \hat{B} = \frac{4}{5} \Rightarrow \hat{B} = \mathbf{53{,}13^\circ}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{4}{5} \Rightarrow \hat{C} = \mathbf{36{,}87^\circ}$$

Bigarren kasua: Bi kateto emanik

Datuak	Ezezagunak	Formulak
b	a	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$
c	$\hat{B}$	$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}$
	$\hat{C}$	$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b}$

Ebatzi 12 cm-ko eta 5 cm-ko katetoak dituen triangelu zuzena.



Datuak: b = 12 cm eta c = 5 cm.
a, $\hat{B}$ eta $\hat{C}$ kalkulatu behar ditugu:

$$a = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = \mathbf{13\ cm}$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{12}{5} \Rightarrow \hat{B} = \mathbf{67{,}38^\circ}$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{5}{12} \Rightarrow \hat{C} = \mathbf{22{,}62^\circ}$$

Hirugarren kasua: Hipotenusa eta angelu zorrotz bat emanik

Datuak	Ezezagunak	Formulak
a	b	$b = a \cdot \cos \hat{C}$
$\hat{C}$	c	$c = a \cdot \sin \hat{C}$
	$\hat{B}$	$\hat{B} = 90^\circ - \hat{C}$

Ebatzi 3 cm-ko hipotenusa eta 70°-ko angelu zorrotz bat dituen triangelu zuzena.

Datuak: a = 3 cm eta $\hat{C}$ = 70°.
b, c eta $\hat{B}$ kalkulatu behar ditugu:

$$b = 3 \cdot \cos 70^\circ = \mathbf{1{,}03\ cm}$$

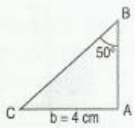
$$c = 3 \cdot \sin 70^\circ = \mathbf{2{,}82\ cm}$$

$$\hat{B} = 90^\circ - 70^\circ = \mathbf{20^\circ}$$

Laugarren kasua: Kateto bat eta angelu zorrotz bat emanik

Datuak	Ezezagunak	Formulak
b	a	$a = \frac{b}{\sin \hat{B}}$
$\hat{B}$	c	$c = \frac{b}{\operatorname{tg} \hat{B}}$
	$\hat{C}$	$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$

Ebatzi 4 cm-ko kateto bat eta 50°-ko angelu zorrotz bat dituen triangelu zuzena.



Datuak: b = 4 cm eta $\hat{B}$ = 50°.
a, c eta $\hat{C}$ kalkulatu behar ditugu:

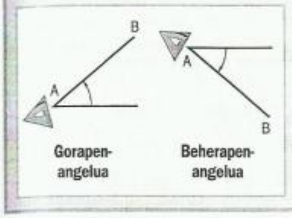
$$a = \frac{4}{\sin 50^\circ} = \mathbf{5{,}22\ cm}$$

$$c = \frac{4}{\operatorname{tg} 50^\circ} = \mathbf{3{,}36\ cm}$$

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 50^\circ = \mathbf{40^\circ}$$

Adi!

Ikaslearen begian ikuste-lerroak plano horizontalarekin eratzen duen angeluari **gorapen-angelua** deritzo, baldin behatuziko puntua planoa baino gorago badago, eta **beherapen-angelua**, beherago badago.



Altuera eta distantziak nola determinatu

Jarraian, trigonometriaren aplikazio garrantzitsuenetakoa den altueren eta distantzien determinazioaren adibideak ikusiko ditugu.

2. adibidea

Obelisko baten oinetik 45 m-ra dagoen lurreko puntu batetik ikusita, obeliskoaren goiko muturraren gorapen-angelua 30°-koa da. Kalkula ezazu obeliskoaren altuera.

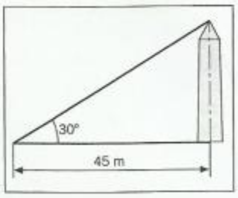
Izan bedi h obeliskoaren altuera. Trigonometria erabilita hauxe dugu:

$$\text{tg } 30° = \frac{h}{45}$$

Eta tg 30°-ren ordez $\frac{\sqrt{3}}{3}$ balioa jarriz eta h bakanduz:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{45} \Rightarrow h = 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 25{,}98$$

Hortaz, obeliskoaren altuera 25,98 m-koa da.



3. adibidea

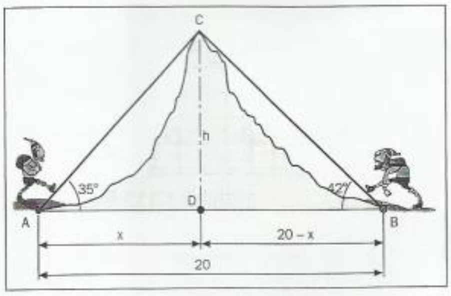
Elkarrengandik 20 km-ko distantziara dauden bi ibiltarik beren plano bertikal berean eta 35° eta 42°-ko angeluez ikusten dute mendi baten punturik altuena. Kalkulatu mendiaren altuera eta mendiaren punturik gorenetik ibiltari bakoitzarenganaino dagoen distantzia.

Adieraz ditzagun h letraz mendiaren altuera eta x letraz AD distantzia. Agerikoa denez, $DB = 20 - x$.

ADC eta CDB triangelu zuzenetan trigonometria aplikatuz:

$$\left.\begin{aligned} \text{tg } 35° &= \frac{h}{x} \\ \text{tg } 42° &= \frac{h}{20 - x} \end{aligned}\right\}$$

tg 35° eta tg 42° jarri ordez beren balioak jarriz, eta sistema ebatziz, ondoko emaitza lortzen da: $h = 7{,}88$ eta $x = 11{,}25$. Beraz, mendiaren altuera 7,88 km-koa da.



ADC eta CDB triangelu zuzenetan Pitagoras-en teorema aplikatuz, AC eta BC lor ditzakegu; hain zuzen, horiexek dira mendiaren punturik altuenetik ibiltarienganaino dauden distantziak.

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} \Rightarrow AC = \sqrt{11{,}25^2 + 7{,}88^2} = 13{,}74$$

$$BC = \sqrt{DB^2 + DC^2} \Rightarrow BC = \sqrt{8{,}75^2 + 7{,}88^2} = 11{,}78$$

Beraz, A puntuan dagoen ibiltariarengandik mendiaren punturik altuenerainoko distantzia 13,74 km-koa da eta B puntuko ibiltariarengandik, 11,78 km.

Ariketa honetan garaturiko prozedurari **behaketa bikoitzeko metodoa** deritzo.

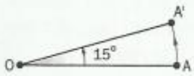
Jarduerak

3. Kalkula ezazu eraikin baten altuera, jakinik ezen bertatik 20 m-ra egonik 54°-ko gorapen-angeluaz ikusten dela bere punturik altuena.
4. Itsasargi batetik 20°-ko beherapen-angeluaz ikusi da itsasontzi bat, eta itsasontzi hori 500 m hurbildu denean, angelua 26°-koa izan da. Zer distantzia zegoen itsasargitik itsasontziraino bigarren behaketaldian?

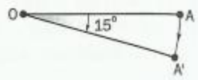
Angelu orientatuak

Angeluak biraketa modura kontsideratuz, kontuan har dezakegu bira taren noranzkoa.

Biraketaren noranzkoa erloju-orratzen higiduraren aurkakoa bada, angelua **positiboa** da.

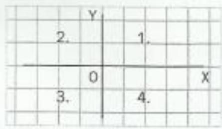


Biraketaren noranzkoa erloju-orratzena bezalakoa bada, angelua **negatiboa** da.

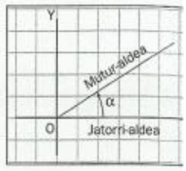


Gogoratu

Koordenatu-ardatzek lau eskualdetan banatzen dute planoa, —**koadranteak**— eta irudian azaldutako moduan zenbakitzen dira.

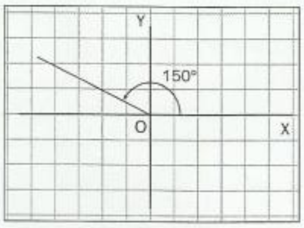


Angelu orientatu bat adierazteko, koordenatu cartesiarren sistema erabiltzen da.



Angeluaren jatorri-aldea abzisen ardatzerdi positiboan jarriko dugu. Mutur-aldearen posizioa angeluaren anplitudearen araberakoa izango da.

Angeluak sailkatzeko, kontuan hartzen da zein koadrantetan dagoen n tur-aldea. Esate baterako, 150°-ko angelua bigarren koadranteko ang bat da (2. ird.)

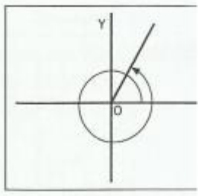


2. ird.

Angelu baten laburpena lehenengo biraketara

Angeluak biraketa modura kontsideratzean, 360° baino handiagoak ren angeluak ere defini ditzakegu.

Demagun, adibidez, 420°-ko angelua. Hain zuzen, 420° biratzeko, lehenik birabete osoa eta gero 60° gehiagoko biraketa egin behar dugu.



Honela, bada, 420°-ko angeluaren adierazpena bat dator 60°-koarekin, eta 60°-ko angelua 420°-ko angelua lehenengo biraketara laburtzearen emaitza da.

Beraz, angelu bat lehenengo biraketara laburtzeko, angeluaren neur 360°-ko balioaz zatitu eta zenbat birabete dauzkan jakingo dugu. Zati taren hondarrak lehenengo biraketako angelu baliokidea adieraziko di

4. adibidea

Laburtu lehenengo biraketara –2 295°-ko angelua, adierazi grafikoki eta esan zein koadrantetakoa den.

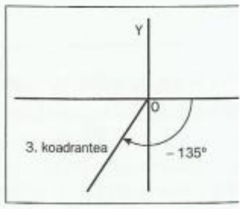
360°-ko balioaren bidezko zatiketa egingo dugu:

$$\begin{array}{l|l} 2295 & 360 \\ \hline 135 & 6 \end{array} \Rightarrow -2295° = -6 \cdot 360° - 135°$$

Beraz, –2 295°-ko angelua –135°-koaren baliokidea da.

Angeluaren jatorri-aldea ardatzerdi positiboaren gainean kokatuko dugu, eta 135°-ko biraketa egingo dugu erloju-orratzen noranzkoan.

Ikus dezakezunez, adierazitako angelua hirugarren koadrantekoa da.



Jarduerak

5. Adierazi grafikoki eta esan zein koadrantetakoak diren honako angelu hauek. Behar izanez gero, leher koadrantera laburtu.

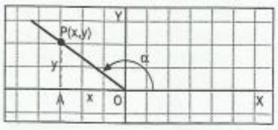
a) 257° *b)* –73° *c)* 420° *d)* 135° *e)* –270° *f)* 1 845° *g)* –870°

128

Edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak

Angelu zorrotzen arrazoi trigonometrikoak definitu ondoren, ikus dezagun nola defini ditzakegun bestelako angelu baten arrazoi trigonometrikoak.

Demagun eskuinaldeko irudian adierazitako α angelua, eta izan bedi P bere mutur-aldeko edozein puntu.



Baldin P puntuaren koordenatuak x eta y badira, eta jatorrirainoko distantzia r bada, honako era honetan definituko ditugu α angeluaren arrazoi trigonometrikoak:

α-ren **sinua** P-ren y ordenatuaren eta jatorrirainoko r distantziaren arteko arrazoia da. $\sin \alpha = \dfrac{y}{r}$

α-ren **kosinua** P-ren x abzisaren eta jatorrirainoko r distantziaren arteko arrazoia da. $\cos \alpha = \dfrac{x}{r}$

α-ren **tangentea** P-ren y ordenatuaren eta x abzisaren arteko arrazoia da. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{y}{x}$

Ikus dezagun definizioak ez daudela aukeratutako P puntuaren menpe.

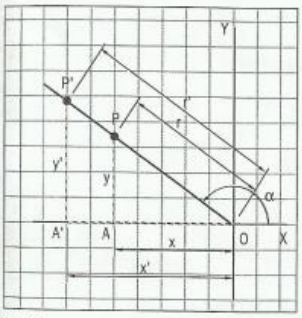
Hain zuzen, α angeluaren mutur-aldeko beste puntu bat, P', kontsideratzen badugu, $OP'A'$ triangelua lortuko dugu, OPA-ren antzekoa (3. ird.). Orduan hauxe betetzen da:

$$\frac{y'}{r'} = \frac{y}{r} = \sin \alpha \qquad \frac{x'}{r'} = \frac{x}{r} = \cos \alpha \qquad \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

Hots, arrazoi trigonometrikoen balioa ez da aldatzen.

Adi!

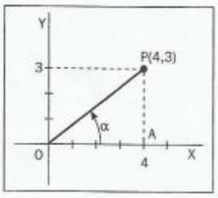
Arrazoiak definitzeko erabili dugun era bat dator aurretik angelu zorrotzen kasuan azaldutakoarekin, zeren $P(x, y)$ puntua angelu zorrotz baten mutur-aldeko puntu bat bada, O, P eta P-k abzisa-ardatzean duen proiekzioa triangelu zuzen baten erpinak baitira, zeinaren katetoak x eta y luzerakoak eta hipotenusa r luzerakoa diren.



3. ird.

5. adibidea

Kalkula ezazu α angeluaren arrazoi trigonometrikoen balioa, beraren mutur-aldea P(4,3) puntutik pasatzen dela kontuan izanik.



Lehenik, Pitagoras-en teorema aplikatuko dugu OAP triangeluan, r kalkulatzeko:

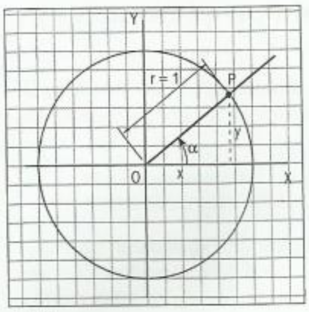
$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Hortaz, arrazoi hauek ditugu:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \;;\; \cos \alpha = \frac{4}{5} \;;\; \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Jarduerak

6. Jakinik angelu baten mutur-aldeko P puntuaren koordenatuak $P(-4, \;\, 6)$ direla, kalkulatu angelu horren arrazoi trigonometrikoen balioak.



4. ird.

Zirkunferentzia goniometrikoa

Ikusi dugunez, α angeluaren arrazoi trigonometrikoen balioa ez dago mu tur-aldean harturiko puntuaren menpe.

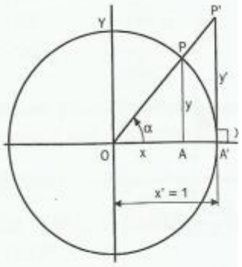
Bereziki, zentroa koordenatu-jatorrian eta 1 balioko erradioa duen zirkun ferentzian dagoen *P* puntua kontsidera dezakegu angeluaren mutur-alde an (4. ird.). Zirkunferentzia horri **zirkunferentzia goniometrikoa** deritzo.

Hain zuzen, $r = 1$ denez, angeluaren sinua eta kosinua puntu horren o denatuaren eta abzisaren balio berekoak dira, hurrenez hurren:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \mathbf{y} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = \boldsymbol{x}$$

Hori dela eta, edozein angeluren sinuaren eta kosinuaren balioen se mentu ordezkariak lor ditzakegu.

Tangentearen balioaren segmentu ordezkaria lortzeko, zirkunferentzia goniometrikoaren eta abzisa-ardatzerdi positiboaren arteko ebaki-puntua den *A'* puntutik pasatzen den zuzen ukitzailea trazatuko dugu; zuzen horrek *P'* (*x'*, *y'*) puntuan ebakitzen du angeluaren mutur-aldea. *OPA* eta *OP'A'* triangeluak elkarren antzekoak dira. Beraz:

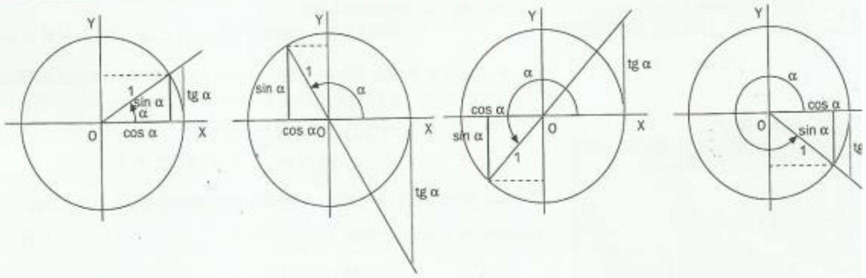


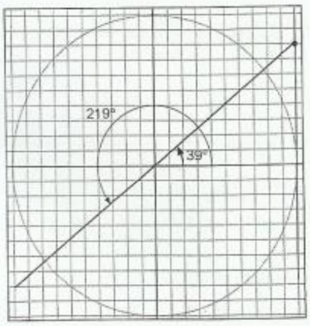
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \frac{y'}{1} = \mathbf{y'}$$

Adi!

Zirkunferentzia goniometrikoak ahalbidetu egiten digu edozein angeluren arrazoi trigonometrikoen balioak era grafiko errazean lortzea.

Era horretan, lehenengo koadranteko edozein angeluren sinuaren, ko nuaren eta tangentearen segmentu ordezkariak lor ditzakegu.





5. ird.

6. adibidea

Marraztu zirkunferentzia goniometriko batean 0,8 balioko tangentea duten angelu guzt

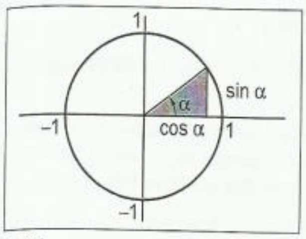
Koadrikula baten gainean 10 koadrotxoko erradioko zirkunferentzia bat trazatuko du eta erradio horrek unitatea adierazten duela kontsideratuko dugu (5. ird.).

Goialdean deskribaturiko eraiketa egingo dugu, eta 8 koadrotxo kontatuko ditugu *A'* p tutik pasatzen den zuzen ukitzailearen gainean. Segmentu horrek 0,8ko balioa adie ten du.

Angelu-neurgailu batez neurtu eta angelu hauexek lortuko ditugu: 39° eta 219°.

Jarduerak

7. Adierazi zirkunferentzia goniometriko batean 150°-ko angeluare sinu, kosinu eta tangentearen segmentu ordezkariak.



6. ird.

Koadrantea	sin	cos	tg
	+	+	+
	+	–	–
	–	–	+
	–	+	–

1. taula.

Adi!

($\sin \alpha)^2$ adierazteko, $\sin^2 \alpha$ idatziko dugu.

Adi!

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ eta $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ adierazpenek ahalbidetu egiten digute edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak kalkulatzea, horietako bat zein den jakinez gero; baina, horretarako, angelua zein koadrantetakoa den jakin behar da.

Arrazoi trigonometrikoen propietateak eta erlazioak

Atal honetan arrazoi trigonometrikoen zenbait propietate aztertuko ditugu, baita angelu baten edo angelu desberdinen arrazoi trigonometrikoen arteko erlazioak ere.

Arrazoi trigonometrikoen balioa eta zeinua

Ikusi dugunez, edozein α angeluren sinuaren eta kosinuaren balioak, zirkunferentzia goniometrikoan dagoen mutur-aldeko P puntuaren ordenatuaren eta abzisaren balioak dira, hurrenez hurren (6. ird.). Eta puntu horren koordenatuen balioak −1 eta 1 balioen artekoak direnez, hauxe baiezta dezakegu:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Gainera, r-ren balioa 1 denez, α angeluaren arrazoi trigonometrikoen zeinua P puntuaren koordenatuen zeinuaren menpe dago soilik; hots, angelua zein koadrantetakoa den, halakoa izango da arrazoien zeinua (1. taula.).

Arrazoi trigonometrikoen arteko erlazioak

Ikus dezagun zer-nolako erlazioak ezar daitezkeen angelu baten arrazoi trigonometrikoen artean.

Demagun zirkunferentzia goniometriko bat eta, adibidez, lehenengo koadranteko α angelua (6. ird.). Koloreztaturiko triangelu zuzenaren katetoak $\sin \alpha$ eta $\cos \alpha$ baliokoak dira. Triangelu horretan Pitagoras-en teorema aplikatuz, hauxe dugu:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Angelua bigarren, hirugarren edo laugarren koadrantekoa balitz ere emaitza berbera lortuko genukeenez, edozein α angeluren kasuan honako hau betetzen dela baiezta dezakegu:

$$\mathbf{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

Adierazpen hori da **trigonometriaren funtsezko formula.**

Bestalde, honako hau dugu:

$$\left.\begin{array}{l} \sin \alpha = y \\ \cos \alpha = x \\ \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{y}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

7. adibidea

Hirugarren koadrantekoa dela, eta $\sin \alpha = -0{,}6$ dela jakinik, kalkulatu $\cos \alpha$ eta $\operatorname{tg} \alpha$.

— Trigonometriaren funtsezko ekuazioan $\sin \alpha$ delakoaren balioa ordezkatuko dugu:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (-0{,}6)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$\cos \alpha$ bakanduz eta eragiketak eginez:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (-0{,}6)^2}$$

$$\cos \alpha = \pm 0{,}8$$

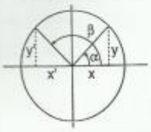
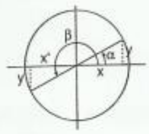
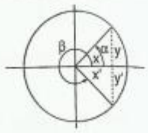
Eta α hirugarren koadrantekoa dela dakigunez, $\cos \alpha = -8$ da.

— Azkenik, $\operatorname{tg} \alpha$ kalkulatuko dugu:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-0{,}6}{-0{,}8} = 0{,}75$$

Angeluak lehenengo koadrantera laburtzea

Taulan ikusiko dugunez, edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak lehenengo koadranteko angelu baten arrazoien berdinak dira, zeinua alde batera utzita.

Bigarren koadrantetik lehen koadrantera laburtzea	Hirugarren koadrantetik lehen koadrantera laburtzea	Laugarren koadrantetik lehen koadrantera laburtzea
$\beta = 180° - \alpha$ $y' = y$ $x' = -x$ 	$\beta = 180° + \alpha$ $y' = -y$ $x' = -x$ 	$\beta = 360° - \alpha$ $y' = -y$ $x' = x$ 
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\text{tg}(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$	$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$ $\text{tg}(180° + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$	$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$ $\text{tg}(360° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

Erlazio horiek ahalbidetu egiten digute edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak kalkulatzea, lehenengo koadrantean dagokion angeluarenak zein diren jakinez gero.

8. adibidea

Kalkulatu 150°-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak.

Bigarren koadranteko angelu bat da. Beraz:

$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\,150° = \text{tg}(180° - 30°) = -\text{tg}\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

9. adibidea

Kalkulatu 240°-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak.

Hirugarren koadranteko angelu bat da. Beraz:

$$\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,240° = \text{tg}(180° + 60°) = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$$

10. adibidea

Kalkulatu 315°-ko angeluaren arrazoi trigonometrikoak.

Laugarren koadranteko angelu bat da. Beraz:

$$\sin 315° = \sin(360° - 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315° = \cos(360° - 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\,315° = \text{tg}(360° - 45°) = -\text{tg}\,45° = -1$$

Jarduerak

8. Esan lehenengo koadranteko zein angeluk balioko duten honako angelu hauen arrazoi trigonometrikoak kalkulatzeko:
a) 137° *b)* 264° *c)* 253° *d)* 2 300° *e)* 105°

9. Beti ere lehenengo koadranteko angelu bat erabiliz, kalkulatu angelu hauen arrazoi trigonometrikoak:
a) 135° *b)* 225° *c)* 300° *d)* 210° *e)* $-60°$

10. Esan zein diren 0° eta 360° balioen artean egonik, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ baldintza betetzen duten angeluak.

Bektoreak

- *Planoko bektoreak*
- *Bektoreen arteko eragiketak*
- *V_2-ren oinarriak*

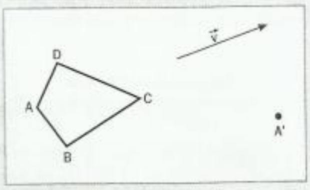
Planoko bektoreak

Hasi aurretik...

- Aintzat hartu eskuinaldeko irudi laua eta ebatzi honako atal hauek:

  a) Aplika iezaiozu $\vec{v}$ bektoreko translazioa.

  b) Determinatu *A* puntuaren homologoa *A'* puntua izatea egiten duen translazioaren bektorea.



Magnitude batzuk erabat determinaturik geratzen dira zenbaki bat eta neurketa-unitatea emanik; esate baterako, bolumena emanik.

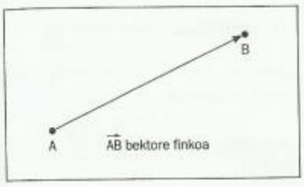
Nolanahi den, bestelako magnitude batzuk determinatzeko, hala nola indarra determinatzeko, zenbakia eta neurketa-unitatea adierazteaz gain, norabide bat eta noranzko bat ere adierazi behar dira. Magnitude horiei *magnitude bektorialak* deritze.

Magnitude bektorialak *bektore* bidez adierazten dira.

Bektore finkoak

Plano bateko bi puntuk, *A* eta *B* puntuek, segmentu bat determinatzen dute, eta segmentu orok *norabide* bat du, segmentua bere barnean daukan zuzenarena, hain zuzen. Dakigunez, norabide bakoitzak bi noranzko ditu, baina segmentuek ez dute noranzkorik: *AB* segmentua eta *BA* segmentua segmentu bera dira.

Noranzko bat definitzeko, bi puntu horien artean jatorria zein den eta muturra zein den adieraziko dugu. Horrela, bektore finko bat lortuko dugu (7. ird.).



7. ird.

Planoko *A* eta *B* puntuak emanik, (*A*, *B*) bikote ordenatuari **A jatorriko** eta **B muturreko bektore finkoa** deritzo; $\vec{AB}$ eran adierazten da.

Adi!

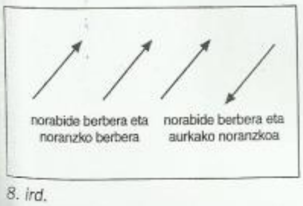
Bektore finko batean jatorria eta muturra kointzidenteak badira, bektore finko nulua dela esaten da.

Bektore finko nuluen modulua zero baliokoa da, eta bektore nulu guztiek norabide eta noranzko berberak dituztela pentsatuko dugu.

Bektore finkoen modulua, norabidea eta noranzkoa

Bektore finko orok modulua, norabidea eta noranzkoa ditu.

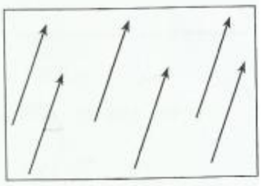
- $\vec{AB}$ bektore finkoaren luzera edo modulua *AB* segmentuaren luzera da eta $|\vec{AB}|$ era sinbolikoan adierazten da.
- $\vec{AB}$ bektore finkoaren norabidea *A*-tik eta *B*-tik pasatzen den zuzenarena da.
- $\vec{AB}$ bektore finkoaren noranzkoa hauxe da: *A*-k eta *B*-k determinaturiko zuzenaren gainean jatorritzat *A* eta muturtzat *B* harturik definitzen dena (8. ird.).



8. ird.

Bektoreen ekipolentzia

Azter itzazu eskuinaldeko irudian adierazitako bektoreak.



Ohar zaitez, modulu, norabide eta noranzko berberak dituztela guztiek. Ekipolenteak direla esaten da.

Bi bektore finko **ekipolenteak** dira baldin modulu bera, norabide bera eta noranzko bera badituzte.

Geometria analitikoa

René Descartes (1596-1650) matematikari frantziarra izan zen *Geometria analitikoa*-ren sortzailea, koordenatuen metodoa erabiliz.

Metodo hori puntuen posizioa adierazteko koordenatu batzuk —cartesiarrak deiturikoak— erabiltzean datza. Horiei esker, bi ezezaguneko ekuazio aljebraikoak kurba lau baten bidez adieraz daitezke grafikoki.

Hortaz, geometria analitikoa honela defini daiteke: objektu geometrikoak aljebra-baliabideen bidez adierazten dituen matematikaren atala.

Bektore askeak

Definitu berria dugun ekipolentzia kontzeptuak ahalbidetu egiten digu pl noko bektore finkoak bektore-multzotan sailkatzea, multzo bakoitza be tore jakin baten ekipolenteak diren bektore guztiek osatzen dutelarik.

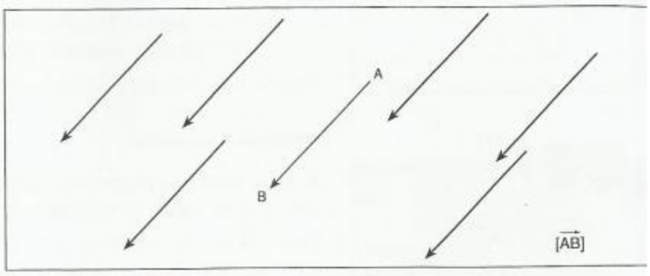
Multzo horietako bakoitzak bektore aske bat osatzen du.

Bektore finko jakin baten ekipolenteak diren bektoreen multzoari **bektor askea** deritzo.

Bektore aske bat eratzen duten bektore finkoetako bakoitza bektore a kearen ordezkaria da.

Bektore askeak letra xehez eta gezi txiki batez adierazi ohi di ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$...), edo bektore askea ordezkatzen duten bektore finkoetako b kortxete artean idatziz.

Esate baterako, $[\overrightarrow{AB}]$ sinboloak $\overrightarrow{AB}$ bektore finkoaren bektore ekipolente eratutako bektore askea adierazten du, irudian ikus dezakezunez.



Bektore askeen modulua, norabidea eta norazkoa

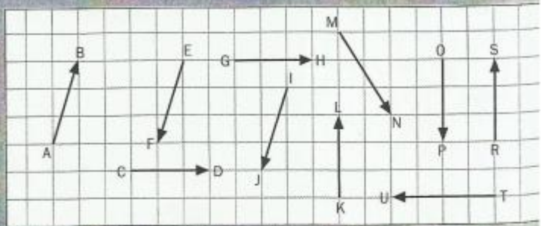
Ikusi duzunez, bektore askea modulu bera, norabide bera eta noranz bera dituzten bektore finko ekipolenteen multzoa da.

Hortaz, bektore askeen modulua, norabidea eta noranzkoa definitu ah ko ditugu.

Bektore aske baten **modulua, norabidea** eta **noranzkoa** beraren edoze ordezkariren *modulua*, *norabidea* eta *noranzkoa* dira.

Jarduerak

11. Aztertu eskuinaldeko irudia eta esan zein diren bertan adierazitako bektore finkoak.
    - *a)* Bildu modulu bereko bektore-multzotan.
    - *b)* Bildu bektore ekipolenteen multzotan.
    - *c)* Esan zenbat bektore aske dauden adierazita irudi horretan.



Bektoreen arteko eragiketak

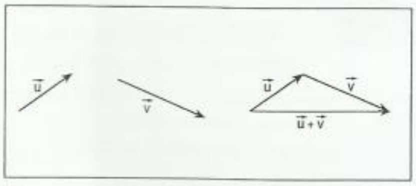
Planoko bektore askeen multzoan —V_2 era sinbolikoan adieraziko dugun multzoan—, honako eragiketa hauek defini daitezke.

Batuketa

Kontsidera ditzagun $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore askeak.

$\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore askeen batura, $\vec{u}+\vec{v}$ eran adierazia, era honetara lortzen den bektore askea da:

— $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen ordezkari bi hartuko ditugu, $\vec{u}$-ren ordezkariaren muturra eta $\vec{v}$-ren ordezkariaren jatorria kointzidenteak izanik.

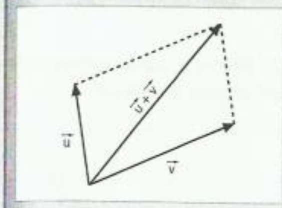


— Jatorritzat $\vec{u}$-ren ordezkariaren jatorria eta muturtzat $\vec{v}$-ren ordezkariaren muturra duen bektorea trazatuko dugu.

Bektore hori $\vec{u}$-ren eta $\vec{v}$-ren batura deritzon bektore askearen ordezkaria da.

Adi!

Paralelogramoaren arauak ahalbidetu egiten digu bi bektore askeren batura erraz kalkulatzea, bektore horiek definitzen duten paralelogramoa eraikiz gero.

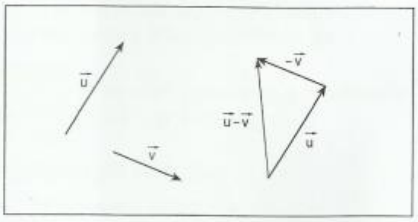


Bektoreen kenketa

Aurkako bektorea dagoenez, bektoreen kenketa ere egin dezakegu. Izan ere, bektore baten kenketa egiteko, aurkakoaren batuketa egin behar da.

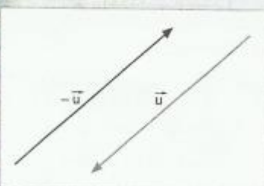
Beraz, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$, bektore askeak emanik, $\vec{u}-\vec{v}$ kalkulatzeko, nahikoa da $-\vec{v}$ bektorea eraikitzea eta $\vec{u}$-rekin batzea.

Bektore hori $\vec{u}$-ren eta $\vec{v}$-ren arteko kendura deritzon bektore askearen ordezkaria da.



Adi!

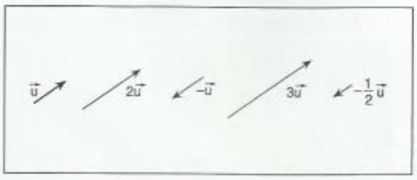
$\vec{u}$ bektore orok bere aurkako bektorea du, $-\vec{u}$, zeinak $\vec{u}$-ren modulu eta norabide berberak dituen, baina aurkako noranzkoa.



Biderketa zenbaki erreal batez

Har ditzagun k zenbaki erreala eta $\vec{u}$ bektore askea.

k zenbaki errealaren eta $\vec{u}$ bektore askearen arteko biderkadura, $k \cdot \vec{u}$ eran adieraziko duguna, honela lortzen den bektore askea da:



- Modulua: k-ren balio absolutua bider $\vec{u}$-ren modulua.
- Norabidea: $\vec{u}$-ren norabide berbera.
- Noranzkoa: k positiboa bada $\vec{u}$-ren noranzko berbera, eta k negatiboa bada, $\vec{u}$-ren aurkakoa.

Adi!

Bektore askeen konbinazio lineal baten emaitza bektore askea da, zeren bektore aske baten eta zenbaki erreal baten arteko biderkadura bektore askea baita eta, halaber, bektore askeen batura bektore askea baita.

Konbinazio lineala

Definitu berri ditugun eragiketak konbinatuz, hots, batuketa eta zenba erreal baten bidezko biderketa konbinatuz, honelako adierazpenak ida ditzakegu:

$$m \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v}$$

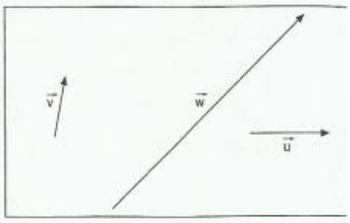
non $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore askeak diren eta m eta n zenbaki errealak.

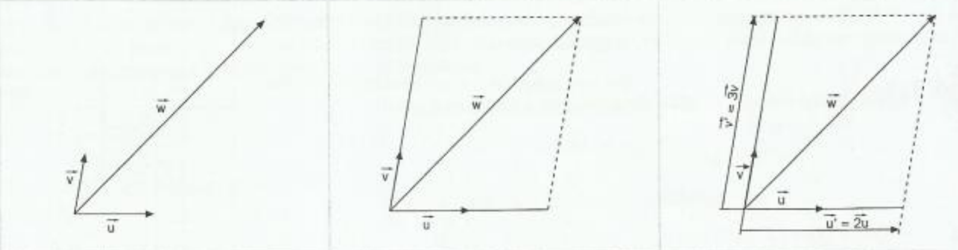
Mota horretako adierazpenak $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore askeen **konbinazio line lak** dira.

Bektore aske baten adierazpena beste biren konbinazio lineal modu

Norabide desberdineko bi bektore aske ez-nulu emanik, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$, planoko beste edozein bektore, $\vec{w}$, $\vec{u}$-ren eta $\vec{v}$-ren konbinazio lineal modura adieraz daiteke.

Horretarako, jarraian azaltzen den prozedura erabiliko dugu.





$\vec{u}$, $\vec{v}$ eta $\vec{w}$-ren ordezkariak hartuko ditugu, hirurak jatorri berekoak.	Barnean $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreak dauzkaten zuzenak trazatuko ditugu. $\vec{w}$-ren muturretik $\vec{u}$, eta $\vec{v}$-rekiko zuzen paraleloak trazatuko ditugu.	Lerro paralelo horiek $\vec{u}'$ eta $\vec{v}'$ bekt reak determinatzen dituzte, $\vec{u}$-ren e $\vec{v}$-ren funtzioan adieraz daitezkeena Kasu honetan, $\vec{u}' = 2\vec{u}$ eta $\vec{v}' = 3$ Beraz: $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

Jarduerak

12. Marraztu edonolako bi bektore aske, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$, eta adierazi bektore hauek:

    a) $\vec{u} + \vec{v}$ *c)* $-\vec{u}$ *e)* $\vec{v} - 2\vec{u}$

    b) $3\vec{v}$ *d)* $\vec{v} - \vec{u}$ *f)* $\vec{u} - \vec{v}$

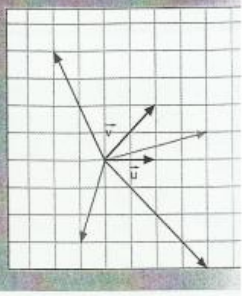
13. Idatzi $\vec{p}$ eta $\vec{q}$ bektore askeen bi konbinazio lineal.

    — Marraztu edozein bi bektore, $\vec{p}$ eta $\vec{q}$, eta adierazi grafikoki konbinazio linealak.

14. Adierazi irudiko bektoreak $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen konbinazio lineal modura.

15. Adierazi ondoko bektoreak 14. ariketako $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen funtzioan.

    a) $2\vec{u} + \vec{v}$ *b)* $-\vec{u} - 2\vec{v}$



V_2-ren oinarriak

Ikusi dugunez, norabide desberdinak dituzten $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore aske ez-nuluak eta planoko edozein $\vec{w}$ bektorea emanik, beti lor ditzakegu bi zenbaki erreal, *m* eta *n*, honako baldintza hau betetzen dutenak:

$$\vec{w} = m \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v}$$

$B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ multzoa V_2-ren *oinarri* bat dela esaten da. Hain zuzen:

Planokoak izanik **norabide desberdina** duten **bi bektore ez-nuluk** V_2-ren **oinarri** bat eratzen dute.

m eta *n* zenbaki errealak $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreek eraturiko oinarrian $\vec{w}$ bektoreak dituen **osagaiak** dira. Honelaxe idazten da:

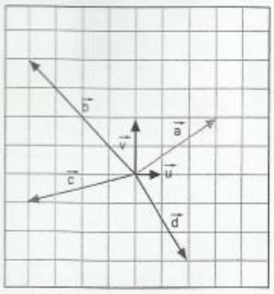
$$\vec{w} = (m, n)$$

Esate baterako, $\vec{w} = 3\vec{u} + \vec{v}$ bada, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreek eraturiko oinarrian $\vec{w}$-ren osagaiak (3, 1) dira. Honelaxe idatziko dugu:

$$\vec{w} = (3, 1)$$

11. adibidea

Esan zein diren irudian marrazturiko $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ eta $\vec{d}$ bektoreen osagaiak, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreek eraturiko oinarrian.



Bektore bakoitza $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen konbinazio modura adieraziko dugu.

$\vec{a} = 3\vec{u} + \vec{v} \quad \Rightarrow \vec{a} = (3, 1)$

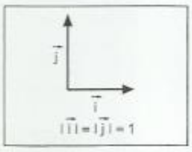
$\vec{b} = -\vec{u} + 2\vec{v} \quad \Rightarrow \vec{b} = (-1, 2)$

$\vec{c} = -4\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \quad \Rightarrow \vec{c} = \left(-4, -\frac{1}{2}\right)$

$\vec{d} = 2\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v} \quad \Rightarrow \vec{d} = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$

Kalkuluak errazteko, modulu unitateko bektore perpendikularrek eraturiko oinarriak erabiltzen dira.

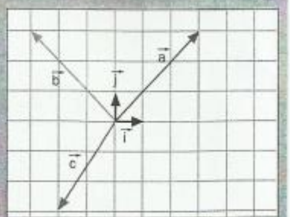
Hain zuzen ere, mota horretako oinarri bat adierazi da eskuinaldeko irudian.



Jarduerak

16. Adierazi irudiko $\vec{a}$, $\vec{b}$ eta $\vec{c}$ bektoreen osagaiak $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ oinarrian.

— Adierazi grafikoki $\vec{d}$ eta $\vec{e}$ bektoreak, beren osagaiak (−3, −1) eta (2, 2) direla kontuan izanik.



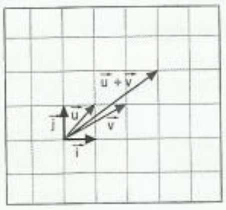
Osagaien bidez adierazitako bektoreen arteko eragiketak

Jarraian, bektoreak batzean edo zenbaki erreal batez biderkatzean bektoreen osagaiekin zer gertatzen den ikusiko dugu.

Batuketa

$B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ oinarrian, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen osagaiak (1, 1) eta (2, 1) dira, hurrenez hurren.

Irudian ikus dezakezunez, $\vec{u} + \vec{v}$ bektorearen osagaiak (3,2) dira; alegia, $\vec{u}$-ren osagaien eta $\vec{v}$-ren osagaien batura.

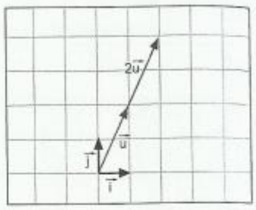


$$\vec{u} + \vec{v} = (1, 1) + (2, 1) = (1 + 2, 1 + 1) = (3, 2)$$

Biderketa zenbaki erreal batez

$B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ oinarrian, $\vec{u}$ bektorearen osagaiak (1, 2) dira.

Irudian ikus dezakezunez, $2\vec{u}$ bektorearen osagaiak (2, 4) dira; alegia, $\vec{u}$-ren osagaiak 2 zenbakiaz biderkatzearen emaitza.



$$2\vec{v} = 2 \cdot (1, 2) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (2, 4)$$

12. adibidea

Oinarri jakin batean $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen osagaiak $\vec{u} = (1, -2)$ eta $\vec{v} = (2, 2)$ direla kontuan izanik, lortu honako bektore hauen osagaiak:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ *b)* $3\vec{u}$ *c)* $2\vec{u} - \vec{v}$

Ikusitako prozedura berbera erabiliz, hauxe dugu:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (1, -2) + (2, 2) =$

$= (1 + 2, -2 + 2) = (3, 0)$

b) $3\vec{u} = 3 \cdot (1, -2) = (3, -6)$

c) $2\vec{u} - \vec{v} = 2 \cdot (1, -2) - (2, 2) =$

$= (2, -4) - (2, 2) =$

$= (2 - 2, -4 - 2) =$

$= (0, -6)$

13. adibidea

Oinarri jakin batean $\vec{u}$, $\vec{v}$ eta $\vec{w}$ bektoreen osagaiak $\vec{u} = (5, 0)$, $\vec{v} = (2, 1)$ eta $\vec{w} = (1, -2)$ dira. Adierazi $\vec{u}$ bektorea $\vec{v}$ eta $\vec{w}$ bektoreen konbinazio lineal modura.

Honako adierazpen hau betetzen duten bi zenbaki erreal, k_1 eta k_2, lortu behar ditugu:

$$\vec{u} = k_1 \cdot \vec{v} + k_2 \cdot \vec{w}$$

Bakoitzari dagozkion osagaiak ordezkatuz:

$$(5, 0) = k_1 \cdot (2, 1) + k_2 \cdot (1, -2) = (2k_1, k_1) + (k_2, -2k_2) =$$

$$= (2k_1 + k_2, k_1 - 2k_2)$$

Azkenik, osagaiak berdinduz, honako ekuazio-sistema hau lortuko dugu:

$$\left.\begin{aligned} 5 &= 2k_1 + k_2 \\ 0 &= k_1 - 2k_2 \end{aligned}\right\}$$

Sistema ebatziz hauxe lortzen da: $k_1 = 2$ eta $k_2 = 1$.

Beraz,

$$\vec{u} = 2\vec{v} + \vec{w}$$

Jarduerak

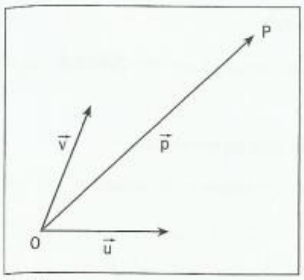
17. Oinarri jakin batean $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen osagaiak $\vec{u} = (1, 2)$ eta $\vec{v} = (2, -1)$ direla kontuan izanik, egin itzazu honako eragiketa hauek:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ *b)* $\vec{u} - \vec{v}$ *c)* $6\vec{u}$ *d)* $3\vec{u} - \vec{v}$

— Adierazi $\vec{w} = (4, 3)$ bektorea $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen konbinazio lineal modura.

Planoko puntu baten koordenatuak

O puntu finkoak eta V_2-ren $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ oinarriak osaturiko multzoak pla noko **erreferentzia-sistema** bat eratzen du, planoko edozein punturer posizioa determinatzeko balio baitu. $\mathbf{R = \{O; \vec{u}, \vec{v}\}}$ era sinbolikoan adie raziko dugu.

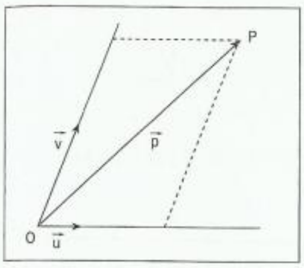


9. ird.

Hain zuzen, planoko edozein P puntuk $\overrightarrow{OP}$ bektorea determinatzen du C puntuarekin batera. $[\overrightarrow{OP}]$ bektore askeari P puntuaren **posizio bektorea** deritzo, eta $\vec{p}$ idatziko dugu (9. ird.).

Izan bitez (p_1, p_2) balioak $\vec{p}$ bektorearen osagaiak B oinarrian. Orduan, (p_1, p_2) balioak P puntuak $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}\}$ erreferentzia-sisteman dituer **koordenatuak** direla esango dugu, eta $P(p_1, p_2)$ idatziko dugu.

P puntuak $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}\}$ erreferentzia-sisteman dituen **koordenatuak** P puntuaren posizio bektoreak $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ oinarrian dituen osagaiak dira.



10. ird.

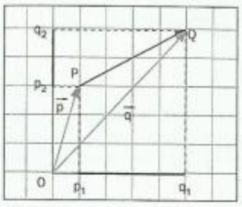
14. adibidea

Lortu P puntuaren koordenatuak $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}\}$ erreferentzia-sisteman (10. ird.).

P puntuak eta O jatorriak $\vec{p} = [\overrightarrow{OP}]$ bektorea determinatzen dute biek batera; $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreek eraturiko oinarrian bektore horren osagaiak (3, 2) dira, hots, $\vec{p} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Beraz, R erreferentzia-sisteman P-ren koordenatuak $P(3, 2)$ dira.

Bi puntuk determinaturiko bektorearen osagaiak



11. ird.

Izan bitez R erreferentzia-sistema eta P eta Q puntuak. Ikus dezagun nola determina daitezkeen $[\overrightarrow{PQ}]$ bektorearen osagaiak sistema horretan, P eta Q puntuen koordenatuetatik abiatuz.

Azter ezazu 11. irudia.

$$[\overrightarrow{OP}] + [\overrightarrow{PQ}] = [\overrightarrow{OQ}] \Rightarrow \vec{p} + [\overrightarrow{PQ}] = \vec{q} \Rightarrow [\overrightarrow{PQ}] = \vec{q} - \vec{p}$$

P eta Q puntuen koordenatuak $P(p_1, p_2)$ eta $Q(q_1, q_2)$ badira:

$$[\overrightarrow{PQ}] = \vec{q} - \vec{p} = (q_1, q_2) - (p_1, p_2) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2) \Rightarrow$$

$$\mathbf{[\overrightarrow{PQ}] = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)}$$

$[\overrightarrow{PQ}]$ bektorearen osagaiak Q muturreko koordenatuen eta P jatorriko koordenatuen arteko kenketa eginez lortzen dira.

15. adibidea

Jakinik erreferentzia-sistema batean P eta Q puntuen koordenatuak P (1, 3) eta Q (2, 0) direla, kalkulatu $[\overrightarrow{PQ}]$ bektorearen osagaiak.

$$[\overrightarrow{PQ}] = (2 - 1, 0 - (-3)) = (1, 3)$$

Jarduerak

18. Jakinik erreferentzia-sistema batean A eta B puntuen koordenatuak P (1, 2) eta B (2, −1) direla, kalkula itzazu $[\overrightarrow{AB}]$ bektorearen osagaiak.

Jarduera ebatziak

A Nola kalkulatuko zenuke etxe baten altuera, etxearen behealdera iritsi ezingo bazina?

Enuntziatuaren ulermena:

Gogoan izan 3. adibidean garaturiko behaketa bikoitzeko metodoa.

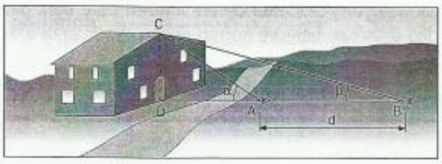
Ebazpidearen planifikazioa:

Behaketa bikoitzeko metodoa aplikatuko dugu:

— Etxearen aurrean jarriko gara, eta horizontalaren eta punturik altuenera (C) doan ikuste-lerroaren arteko α angelua neurtuko dugu.

— Etxetik urrunduko gara edonolako d distantziaz lerro zuzenean AD norabidean, B puntuan kokatu arte, eta aurreko prozedura errepikatuz, β angeluaren balioa lortuko dugu.

— d distantzia neurtuko dugu. Datu horiekin problema ebatzi ahalko dugu.



Ebazpen-planaren burutzapena:

Suposa dezagun ezen, planifikatu dugun moduan egin ondoren, honako balio hauek lortu ditugula: $\alpha = 36°$, $\beta = 16°$ eta $d = 25$ m. Etxearen altuera h letraz adieraziko dugu, eta A-tik D-rako distantzia x letraz. Trigonometria aplikatuz:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 36° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 16° = \dfrac{h}{x+25} \end{array}\right\}$$

Sistema hori ebatzita, hauxe lortuko dugu:

$$x = 16{,}30 \text{ eta } h = 11{,}84$$

Beraz, etxearen altuera 11,84 m-koa da.

Emaitzaren eta jarraituriko prozesuaren berrikuspena:

Berrikusi egingo ditugu eginiko kalkuluak eta erantzuna ea zuzena den egiaztatuko dugu.

19. Ibai baten ertz batean dagoen behatzaile batek 56°-ko angeluaz ikusten du beste ertzean dagoen zuhaitz bat. Eta 15 m atzerago joanda, 17°-ko angeluaz ikusten du. Zein da zuhaitzaren altuera?

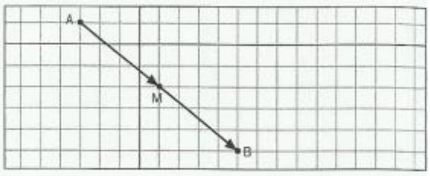
B Lortu $A(-3, 1)$ eta $B(5, -5)$ puntuen arteko segmentuaren erdiko puntuaren koordenatuak.

Enuntziatuaren ulermena:

Gogoratu ezen erdiko puntuak bi parte berdinetan za tzen duela segmentua.

Kontuan izan A eta B puntuen arteko segmentuaren erdiko puntuak honako hau betetzen duela:

$$[\overrightarrow{AB}] = 2 \cdot [\overrightarrow{AM}]$$



Ebazpidearen planifikazioa:

— Izan bitez $A(a_1, a_2)$ eta $B(b_1, b_2)$ balioak A segme tuaren muturrak diren A eta B puntuen koorden tuak, eta $M(m_1, m_2)$ erdiko puntuarenak. Aurrek adierazpenean ordezkatuz, hauxe dugu:

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2) = 2(m_1 - a_1, m_2 - a_2)$$

— Osagaiak berdinduz:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 - a_1 = 2(m_1 - a_1) \\ b_2 - a_2 = 2(m_2 - a_2) \end{array}\right\}$$

— Eragiketak egin, eta m_1 eta m_2 bakanduz:

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

Ebazpen-planaren burutzapena:

Planifikaturiko moduan egingo dugu. Beraz, $A(-3,$ eta $B(5, -5)$ puntuak emanik, erdiko puntuaren koord natuak honako hauek dira:

$$m_1 = \frac{-3+5}{2} = 1\ ;\ m_2 = \frac{1+(-5)}{2} = -2$$

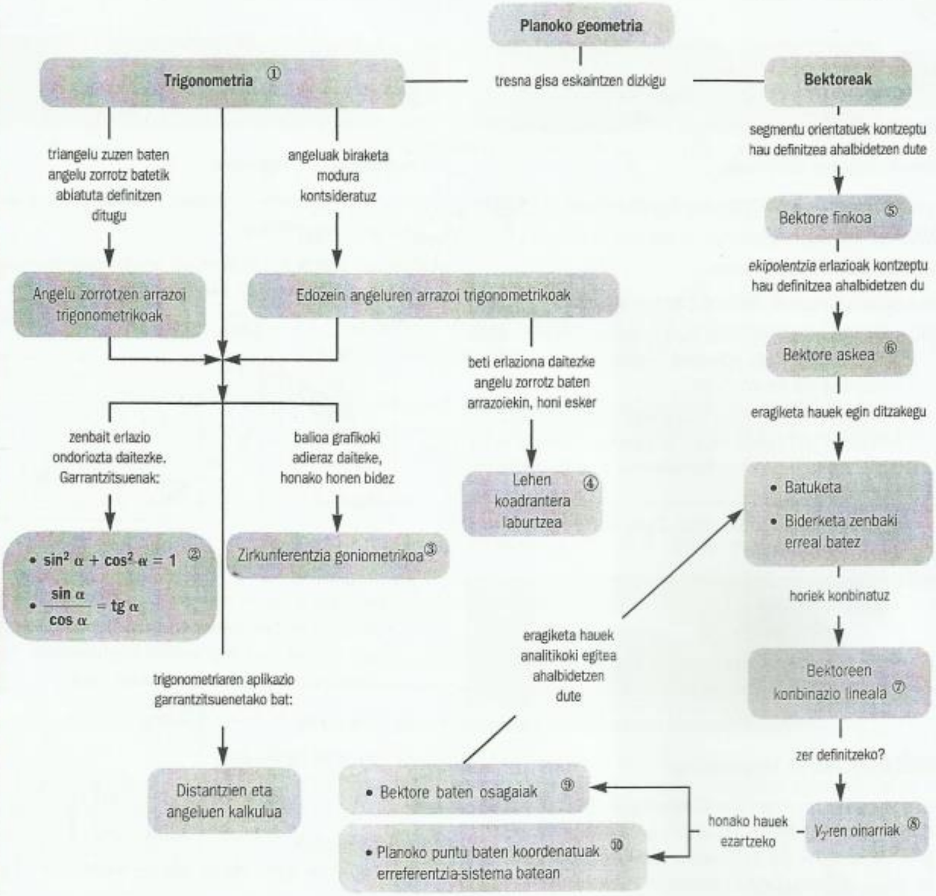
Beraz, $M(1, -2)$.

Emaitzaren eta jarraituriko prozesuaren berrikuspen

Berrikusi egingo ditugu eginiko kalkuluak eta erantzur zuzena den ala ez konprobatuko dugu.

20. Kalkula itzazu $P(-5, 1)$ eta $Q(7, 3)$ puntuen arteko segmentuaren erdiko puntuaren koordenatuak.

Berrikusketa



Ideia nagusiak

① **Trigonometriak** ahalbidetu egiten digu triangelu baten aldeen luzerak bere angeluen zabalerekin erlazionatzea.

② Edozein angeluren arrazoi trigonometrikoek, besteren artean, **trigonometriaren funtsezko formula** deritzon erlazioa betetzen dute.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

③ Zentroa koordenatu-jatorrian egonik 1 balioko erradioa duen zirkunferentziari **zirkunferentzia goniometrikoa** deritzo. Edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak grafikoki adierazteko balio du zirkunferentzia horrek.

④ **Lehenengo koadrantera laburtzea** deritzon metodoak erlazio egokiak eskaintzen dizkigu edozein angeluren arrazoi trigonometrikoak kalkulatzeko, lehenengo koadranteko angeluenak jakinez gero.

⑤ Planoko *A* eta *B* puntuak emanik, (*A*, *B*) bikote ordenatuari ***A* jatorriko eta *B* muturreko bektore finkoa** deritzo eta $\overrightarrow{AB}$ era sinbolikoan adierazten da.

⑥ Bektore finko jakin baten ekipolenteak diren bektoreen multzoari **bektore askea** deritzo.

⑦ $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektore askeen **konbinazio lineala** mota honetako adierazpena da:

$$m \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v}$$

non *m* eta *n* edonolako bi zenbaki erreal diren.

⑧ Planokoak izanik **norabide desberdina** duten **bi bektore ez-nuluk** V_2-ren **oinarri** bat eratzen dute.

⑨ Bektore batek oinarri batean dituen **osagaiak** bektore hori oinarriko bektoreen konbinazio lineal modura adieraztea ahalbidetzen duten zenbaki errealak dira.

⑩ *O* puntu finkoak eta V_2-ren $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ oinarriak osaturiko multzoak planoko **erreferentzia-sistema** bat eratzen du, eta $R = \{O; \vec{u}, \vec{v}\}$ eran adierazten da.

P puntuak *R* sistemarekiko dituen koordenatuak $\vec{p} = [\overrightarrow{OP}]$ bektorearen osagaiak dira.

Praktikatu

Aztergaiak

21. Posible al da angelu zorrotz baten sinua 1 baino handiagoa izatea? Arrazoitu erantzuna.

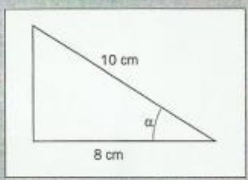
22. Bila ezazu ea erlaziorik dagoen elkarren osagarriak diren bi angeluren kosekantearen eta sekantearen artean.

23. Bi bektore finko emanik, beti egin al daiteke bien batuketa? Arrazoitu erantzuna.

24. Nola definituko zenuke V_2-ren oinarriak zer diren?

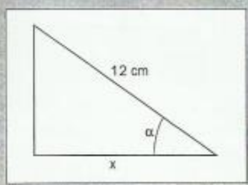
Ariketak

25. Kalkulatu eskuinaldeko irudiko α angeluaren sinua, kosinua eta tangentea.

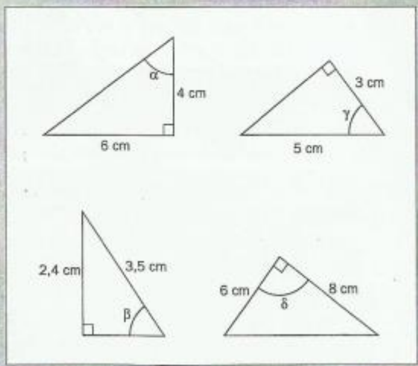


26. $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$ dela jakinik, zein da eskuinaldeko irudiko triangelu zuzenaren x aldearen luzera?

— Kalkulatu sin α eta tg α.



27. Kalkulatu irudiko triangelu zuzenetako α, β, γ eta δ angeluen arrazoi trigonometrikoak.



28. Triangelu zuzen baten katetoak 5 cm eta 8 cm-koak dira. Kalkulatu triangelu horren angelu zorrotzen arrazoi trigonometrikoak.

29. Ebatzi A erpinean angelu zuzena duen ABC triangelua honako kasu hauetan.

a) $a = 20$ cm, $b = 16$ cm

b) $c = 10$ cm, $b = 5$ cm

c) $b = 5$ cm, $\hat{C} = 40°$

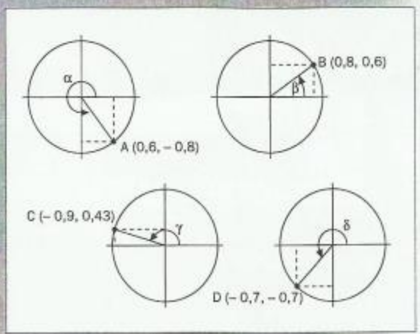
d) $c = 8$ cm, $\hat{C} = 50°$

30. Esan zein koadrantetakoak diren angelu hauek.

a) 1 340° *c)* 40° *e)* −450° *g)* 3 330°

b) −250° *d)* 1 435° *f)* 720° *h)* −150°

31. Kalkulatu irudian adierazitako angeluen arrazoi trigonometrikoak.



32. Lortu ondoko angeluen arrazoi trigonometrikoak, konpasa, erregela graduatua eta angeluneurgailua erabiliz.

a) 62° *b)* 168° *c)* 257° *d)* 355°

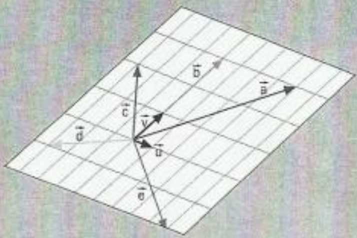
— Egiaztatu emaitzak kalkulagailuz.

33. Kalkula itzazu α angeluaren arrazoi trigonometrikoak, jakinik laugarren koadrantekoa dela eta $\sin \alpha = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ dela.

34. Erlaziona itzazu honako angelu hauen arrazoi trigonometrikoak lehen koadranteko angelu baten arrazoiekin.

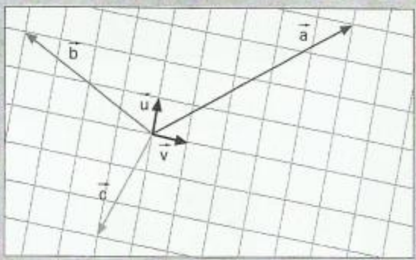
a) 126° *b)* 248° *c)* 350° *d)* −110°

35. Adierazi irudiko bektoreak $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen konbinazio lineal modura.



36. Adierazi irudiko $\vec{a}$, $\vec{b}$ eta $\vec{c}$ bektoreen osagaiak $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ oinarrian.

— Adierazi era grafikoan $\vec{p}$ eta $\vec{q}$ bektoreak, hurrenen hurren B oinarrian dituzten osagaiak $(1, -3)$ eta $(-2, 4)$ direla jakinik.



37. Oinarri jakin batean $\vec{r}$ eta $\vec{s}$ bektoreen osagaiak $\vec{r} = (3, 1)$ eta $\vec{s} = (-2, 2)$ dira. Kalkula itzazu bektore hauen osagaiak oinarri horretan.

a) $\vec{r} + \vec{s}$ *c)* $2\vec{r} - \vec{s}$ *e)* $-\vec{r} - \vec{s}$

b) $\vec{s} - 2\vec{r}$ *d)* $\dfrac{-2}{3}\vec{r}$ *f)* $3\vec{r} - \dfrac{1}{2}\vec{s}$

Problemak

38. Kalkula ezazu 4 cm-ko erradioko zirkunferentzia batean inskribaturiko oktagono erregular baten azalera.

39. Eliza baten kanpandorreak 70 m-ko itzala proiektatzen du 1 m-ko makilak 0,8 m-ko itzala proiektatzen duen une berean. Ebatzi:

a) Zein da kanpandorrearen altuera?

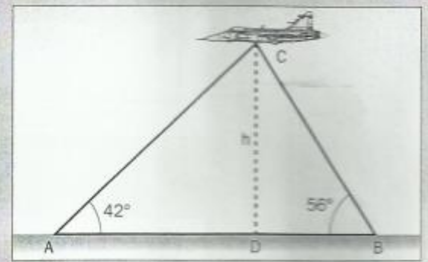
b) Zer angelu eratzen dute eguzki-izpiek zoruarekin?

40. Hormatik zein distantziatara jarri behar dugu 6 m-ko luzerako eskailera bat 4 m-ko altuerara hel dadin?

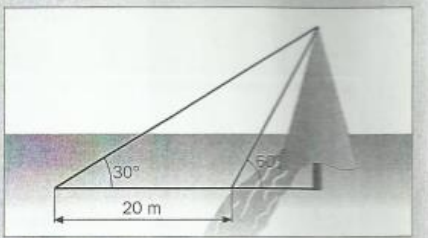
41. Zer angelu eratuko du aurreko problemako eskailerak zoruarekin? Eta hormarekin?

42. Une jakin batean eguzki-izpien eta lurrazalaren arteko angelua 36°-koa dela jakinik, kalkula ezazu zein den une berean 16,52 m-ko itzala proiektatzen duen dorre baten altuera.

43. Bata bestetik 15 km-ko distantziara dauden bi radarrek beren plano bertikalean dagoen hegazkin bat detektatu dute 42° eta 56°-ko angeluez. Kalkulatu zein altueratan doan hegazkina eta zein diren hegazkinetik bi radarretaraino dauden distantziak.



44. Ibaiertz batean dagoen pertsona batek 60°-ko angeluaz ikusten du beste ertzean dagoen zuhaitz bat. Lerro zuzenean 20 m urruntzean, 30°-ko angeluaz ikusten du. Kalkula itzazu zuhaitzaren altuera eta ibaiaren zabalera.

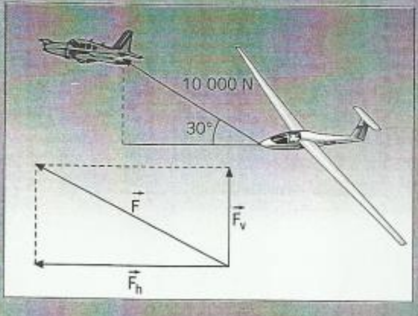


45. Itsasargi baten dorretik 35°-ko beherapen-angeluaz ikusten da itsasontzi bat. Itsasargirantz lerro zuzenean 500 m hurbiltzean, angelua 70°-koa da.

Kalkulatu bigarren posizioan itsasontzitik itsasargiraino dagoen distantzia eta dorrearen altuera.

Sakonago

46. Hegazkin bat lurreratze-pistaren gainetik doa, atzean planeagailu bat atoian daramala. Bi ibilgailuak lotzen dituen kableak 30°-ko angelua eratzen du horizontalarekin, eta planeagailuari eragiten dion indarra 10 000 N-ekoa da. Zein da indar horren osagai horizontalaren balioa?

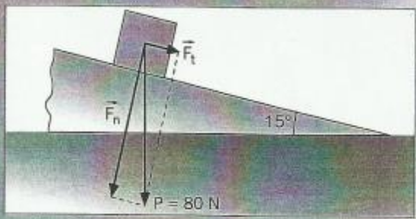


Oharra: indarraren norabidea horizontala ez bada, indarra bi osagaitan deskonposa daiteke, bata horizontala eta bestea bertikala.

47. Garabi batek atoian darama auto bat horizontalarekiko 40°-ko angeluaz eragiten duen 3 000 N-eko indarraz. Kalkula itzazu indar horren osagai horizontalaren eta osagai bertikalaren balioak.

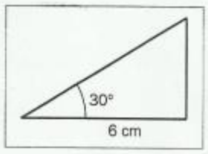
48. Iparrerako norabideaz 1 200 km/h-ko abiaduraz higitzen ari zen hegazkin bat ekialderantz 120 km/h-ko abiaduraz desplazatzen ari den zurrunbilo batean sartu da. Kalkulatu zer angelu eratzen duen hegazkinaren ibilbideak ekialderanzko norabidearekin.

49. Irudian adierazitako aldapa edo *plano inklinatuaren* gainean geldi dagoen gorputzaren pisua 80 N-ekoa dela jakinik, kalkulatu planoarekiko perpendikularki egiten den indarra (F_n edo indar *normala*) eta planoarekiko paraleloki egiten den indarra (F_t edo indar *tangentziala*).



Autoebaluazioa

1. Eskuinaldeko irudiko datuak kontuan izanik, esan zein den triangelu zuzenaren hipotenusaren luzera:



a) 5,20 cm *b)* 6,93 cm *c)* 12,20 cm

2. Kalkulatu cos α, jakinik ezen α lehenengo koadrantekoa dela eta sin $\alpha = 0{,}6$ dela.

a) $\cos\alpha = 0{,}6$ *b)* $\cos\alpha = 0{,}7$ *c)* $\cos\alpha = 0{,}8$

3. Kontuan izanik α bigarren koadranteko angelua dela eta $\cos\alpha = -0{,}70$ dela, hauxe dugu:

a) $\text{tg}\,\alpha = 0{,}70$ *b)* $\text{tg}\,\alpha = -1{,}02$ *c)* $\text{tg}\,\alpha = -1{,}33$

4. Zutoin bertikal bati eusten dion 26,50 m-ko luzerako kable batek 50°-ko angelua eratzen du horizontalarekin. Beraz, hauxe da zutoinaren altuera:

a) 13,25 m *b)* 20,30 m *c)* 33,59 m

5. $\vec{a}$ bektoreak honako adierazpena du $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen konbinazio lineal modura:

a) $-3\vec{u} - 2\vec{v}$ *b)* $-\vec{u} - \vec{v}$ *c)* $2\vec{u} + 3\vec{v}$

6. Adierazi $\vec{u} + \vec{v}$ batura bektorearen osagaiak, jakinik oinarri jakin batean $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen osagaiak $\vec{u} = (2, 1)$ eta $\vec{v} = (-3, 2)$ direla.

a) $(-1, 3)$ *b)* $(1, -3)$ *c)* $(-5, 3)$

7. *A* eta *B* puntuen osagaiak *A* (5, 1) eta *B* (−1, −1) izanik, hauexek dira $\overrightarrow{AB}$ bektorearen osagaiak:

a) $(-6, -2)$ *b)* $(4, 0)$ *c)* $(6, 2)$

144

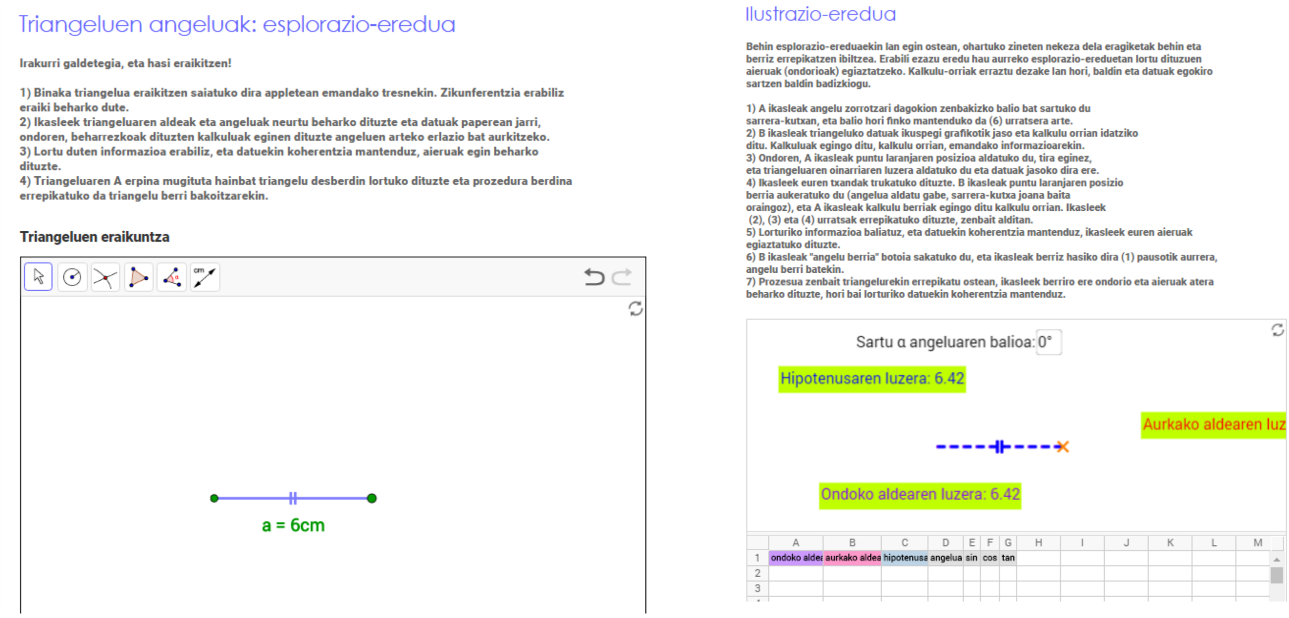
B. Eredu dinamikoa

Ondoko estekan diseinatutako eredu dinamikoa dago. GeoGebratube kanala erabili da ikasleekin lan egin ahal izateko.

Eredu dinamikoa bi faseetan banatu da, aurreko orrialdeetan azaldu den moduan, esplorazio- eta ilustrazio-faseak hain zuzen ere. Bi ereduetan, azalpen testu bat ageri da eta erabilgarri dauden tresnekin lan egin behar dute ikasleek. Ezkerrean lehenengo galdetegiari dagokion eredu dinamikoa ikus daiteke, bertan triangeluen eraikuntza bat egin behar da eta esplorazio-eredua denez kalkulu guztiak paperean.

Eskuinean aldiz, bigarren galdetegiari dagokion eredua izanik aldaketa batzuk ditu: eraikuntza egina dago eta soilik balioak sartu behar dira. Ilustrazio-eredua denez, tresna gehiago izanen ditu erabilgarri kalkulua errazteko orduan, kalkulu orria ikus daiteke[9].

Honela, bi ereduen aldeak ikus daiteke.



10. irudia: erredu dinamikoaren itxura.

[9] Eredu dinamikoa hemen kontsultatu daiteke: https://www.geogebra.org/m/P7kCKvpW?doneurl=%2Fnahia%252Bbs

C. Galdetegiak

Ondorengo Anexoan diseinatu den ariketa aurrera eraman ahal izateko diseinatutako galdetegiak agertuko dira.

Triangeluen angeluak lantzeko galdetegia:

2016/04/15

Izen-abizenak:

TRIANGELUAK

Triangeluak eraikitzen 1, esplorazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=6cm, b=8cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. (Beharrezkoa ikusten baduzu taula bat egin ezazu). Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

1

2016/04/15

c. Saiatu zaitezte angeluen arteko erlazioa zein den ondorioztatzen. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

3

2016/04/15

Izen-abizenak:

Triangeluak eraikitzen 2, ilustrazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=6cm, b=8cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

4

2016/04/15

c. Saiatu zaitezte angeluen arteko erlazioa zein den ondorioztatzen. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

5

Arrazoi trigonometrikoak lantzeko galdetegia:

2016/04/15

Izen-abizenak:

TRIANGELUEN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

Triangelu zuzenen sinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

1

2016/04/15

Triangelu zuzenen kosinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

3

2016/04/15

Triangelu zuzenen tangentea, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

5

2016/04/15

Ilustrazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

7

Triangelu zuzenen ebazpena lantzeko galdetegia:

2016/04/29

Izen-abizenak:

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

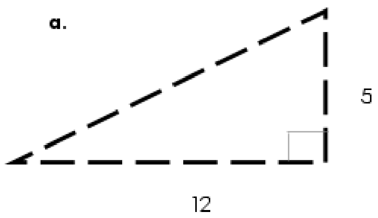
Ebatzi ondoko triangeluak.
Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

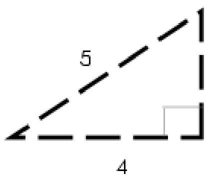
- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,…)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.

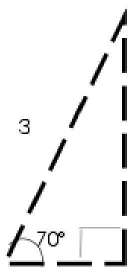
a.



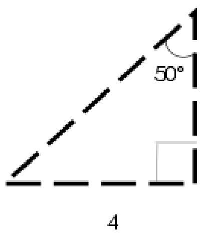
b.



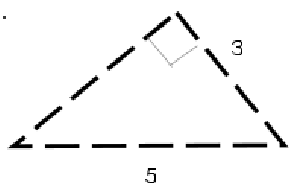
c.



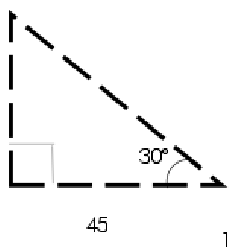
d.



e.



f.



D. Triangeluen angeluak, esplorazio-eredua

2016/04/15

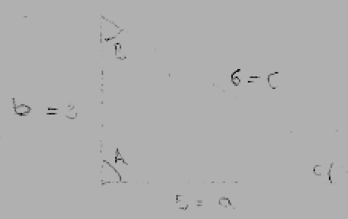
Izen-abizenak: 1 Ikaslea eta 2 Ikaslea.

TRIANGELUAK

Triangeluak eraikitzen 1, esplorazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=5cm, b=6cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

EZ GENEKIEN ERRAMIENTAK ERABILTZEN



b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. (Beharrezkoa ikusten baduzu taula bat egin ezazu). Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

	a	b	c	A	B	C
1. TRIANGELUA →	5	3	6	93.72°	56.25°	29.93°
2. TRIANGELUA:	5	8	7	38.21°	60°	81.79°
3. TRIANGELUA:	5	7	9	95.74°	33.56°	50.7°
4. TRIANGELUA:	5	4	6	82.82°	55.77°	41.41°
5. TRIANGELUA:	5	8	5	36.87°	36.87°	106.26°
6. TRIANGELUA:	5	7	6	57.12°	44.42°	78.46°

2016/04/15

c. Saiatu zaitezte angeluen arteko erlazioa zein den ondorioztatzen. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

• ~~Bat~~ Hiru angeluak batuz 180° ateratzen da. $93{,}82° + 56{,}25° + 29{,}93° = 180°$

$38.21° + 60° + 81{,}79 = 180°$

2016/04/15

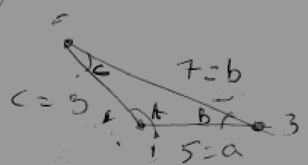
Izen-abizenak: 3 Ikaslea eta 4 Ikaslea.

TRIANGELUAK

Triangeluak eraikitzen 1, esplorazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=6cm, b=~~8~~cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

Margotu dugu 6 cm segmentua, erpino bakoitzean 3cm eta 7cm eradi zirkunferentzia marraztu dugu zirkunferentzien artea eliaki puntuak eta lotu ditugu.



A = 5cm
B = 3cm
C = 7cm

b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. (Beharrezkoa ikusten baduzu taula bat egin ezazu). Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

Margota dugu 6 cm segmentua, erpina bakoitzean 5cm eta 8cm eraiki zirkunferentzia marraztu

a	b	c	A	B	C	
5	7	3	120°	29°	39°	→ Eskaleno eta Kamutsa
5	8	5	107°	32°	37°	→ Isoszeka eta Kamutsa
5	6	9	39°	109°	35°	→ Eskaleno eta Kamutsa
5	6	10	27°	131°	22°	→ Eskaleno eta Kamutsa
5	6	9'5	34°	119°	27°	→ Eskaleno eta Kamutsa
5	8'5	5'5	108°	38°	35°	→ Eskaleno eta Kamutsa

2016/04/15

c. Saiatu zaitezte angeluen arteko erlazioa zein den ondorioztatzen. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

~~Triangelu guztietan lehardu erpinoa, aldea,~~

Angelu guztiak batu, kendu, biderkatu eta zatitu ~~dezakete~~ ahal dira

Angeluen konketa batzuetan − 105° adibidez ateratzen da eta batuketan guztietan

$1 \rightarrow 120 + 29 + 39 = 188°$

$2 \rightarrow 107 + 32 + 37 = 176°$

$3 \rightarrow 39 + 109 + 35 = 183°$

$4 \rightarrow 27 + 131 + 22 = 180°$

$5 \rightarrow 34 + 119 + 27 = 180°$

$6 \rightarrow 108 + 38 + 35 = 181°$

Bi hirukietan 180° ateratzen da eta besteetan ez da ateratzen

2016/04/15

Izen-abizenak: 5 Ikaslea eta 6 Ikaslea.

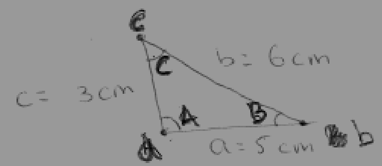
TRIANGELUAK

Triangeluak eraikitzen 1, esplorazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=6cm, b=8cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

a: 5 b: ~~6~~ 7 c: 3

* Hasi gara 2 zirkunferentzia egiten: 3cm eta 6 cm. Gero, intesekzioa bilatu dugu eta puntuak lotu ditugu. Eta azkenik neurtu dugu.



b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. (Beharrezkoa ikusten baduzu taula bat egin ezazu). Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

		a	b	c	A	B	C	
eskalenoa	Triangelu 1.	5	6	3	93	25	56	kamutsa
eskalenoa.	Triangelu 2.	5	3'5	3	43	35	100	kamutsa
eskalenoa	Triangelu 3.	5	6	4	82	41	55	zorrotza
eskalenoa	Triangelu 4.	5	3'5	4	43	52	83	zorrotza
isoszele	Triangelu 5.	5	2	5	23	78	78	zorrotza
eskalenoa	Triangelu 6.	5	8	4'5	114	30	34	kamutsa

2016/04/15

c. Saiatu zaitezte angeluen arteko erlazioa zein den ondorioztatzen. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

* Seiak hiru alde dituzte.

* Seiak hiru erpin dituzte.

* Angeluekin ariketak egin al dira: zatitu daitezke, batu daitezke, biderkatu daitezke ...

Adib:

$95° + 25° + 56° = 176°$

atea beher da 180° baino hamartarrak ez ditugu hartu.

2016/04/15

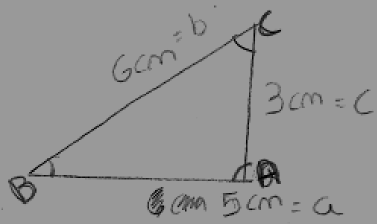
Izen-abizenak: 7 Ikaslea eta 8 Ikaslea.

TRIANGELUAK

Triangeluak eraikitzen 1, esplorazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=5cm, b=6cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

Lehenengo alde batean zirkunferentzia 3cm erradioa, gero beste aldean 6 cm erradioa, elkartu diren puntuan triangelua atera da



b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. (Beharrezkoa ikusten baduzu taula bat egin ezazu). Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

	a	b	c	A	B	C	
Triangelu 1	5	6	3	93,82	29,93	56,25	kamutsa
Triangelu 2	5	7	3	21,30	120	33'22	kamutsa
Triangelu 3	5	5	4	66'42	47'16	66'42	zorrotza
Triangelu 4	5	4	4	51,32	51'32	77'36	zorrotza
Triangelu 5	5	6	7	78'46	57'12	44'42	zorrotza
Triangelu6	5	2	~~3~~ 6	12 09	110,49	51'82	kamutsa

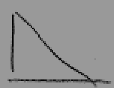
2016/04/15

c. Saiatu zaitezte angeluen arteko erlazioa zein den ondorioztatzen. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

- Angelu guztiak 3 erpin daukatela
- 3 alde dauzkate
- 3 angelu daukate
- Erdia daukatela
- Triangelu guztietan zirkunszentzia egin daiteke.

Exte dut 93'82, 29,93 eta 56,25 gehitzen 360° ateratako da.

180 ematen du

360ren erdia  bakarrik erdia da

2016/04/15

Izen-abizenak: 9 Ikaslea eta 10 Ikaslea.

TRIANGELUAK

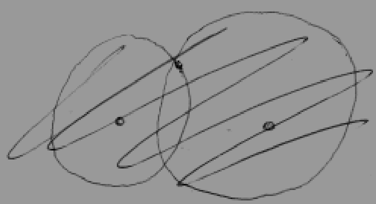
Triangeluak eraikitzen 1, esplorazio-eredua.

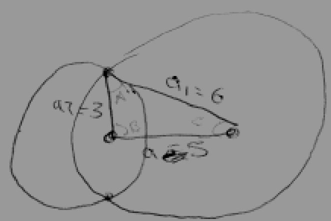
a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=6cm, b=8cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

Lehenengo zirkuferentzia bat egin dugu, 6cm etakoa

Beste erpinetik 3cmtako zirkunferentzia egin dugu

Bi erpinak eta ebaki puntua kontuan izanda hiruki egin dugu





b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. (Beharrezkoa ikusten baduzu taula bat egin ezazu). Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

Triangelu bat zenbat neurtzen duen

	a	a_1	a_2	A	B	C
1	5cm	6cm	3cm	56,25°	93,82°	29,93°
2	5cm	5,5cm	3cm	64,42°	82,82°	32,95°
3	5cm	5cm	3cm	72,54°	72,54°	34,82°
4	5cm	4,5cm	3cm	80,50°	62,72°	36,30°
5	5cm	4cm	3cm	90°	53,13°	36,87°
6	5cm	3,5cm	3cm	100,20°	43,65°	36,18°

Angeluak

1,2,3,4 → Zorrotza

5 → Angeluzuzena

6 → Kamutza

Aldeak

1 → Eskaleno

2 → Eskaleno

3 → Isoszele

4 → Eskaleno

5 → Eskaleno

6 → Eskaleno

2016/04/15

c. Saiatu zaitezte angeluen arteko erlazioa zein den ondorioztatzen. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

3erpina daukate.

3ak triangelu batean daude eskutuak.

á eta á a_2 beti neurri berak daude

Angeluak 180° guztira

Angeluak batuz 180°

Borobilak 360° daukate guztira

A angelua + B angelua + C angelua: 180° ematen du

Adibidez:

1→ 56,26° + 93,82° + 29,93° = 180°

2→ 64,42° + 82,82° + 39,75° = 180°

3→ 72,64° + 72,54° + 34,82° = 180°

4→ 80,54° + 62,72° + 36,34° = 180°

5→ 90° + 53,13°, 36,77° = 180°

6→ 100,29° + 43,53° + 36,18 = 180°

E. Triangeluen angeluak, ilustrazio-eredua

Ordenagailua ez zuen ongi funtzionatzen.

2016/04/20

Izen-abizenak: 3 Ikaslea eta 4 Ikaslea.

Triangeluak eraikitzen 2, ilustrazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=5cm, b=7cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

Bi zirkunferentzia egin bat 3 cm eta beste 7cm-koa gero bi zirkunferentzien ebakidura bilatu eta hiruki egin

b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

Kalkulu orria erabiltzen ari naiz kalkulagailua ordez

1- a 5 38'21°
b 7 120°
c 3 21'79
180

2- a 5 30'75
b 4 24'15
c 8 125'1
180

3- a 5
b 8
c 3

5

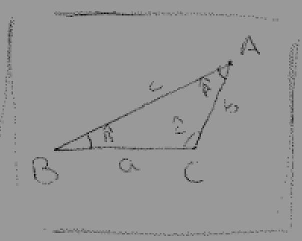
2016/04/~~15~~ 20

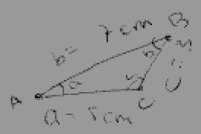
Izen-abizenak: 5 Ikaslea eta 6 Ikaslea.

Triangeluak eraikitzen 2, ilustrazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=6cm, b=8cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

a = 5 cm b = 7 cm c = 3 cm





* Bi zirkunferentzia egin ditugu, lehenengoa 7 cm-koa eta bestea 3 cm-koa.
* Ebaki puntua hartu dugu eta triangelua sortu dugu.

b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

Tauiaren pausuak

* Hartu dugu lehenengo angelua eta kalkulatu dugu, ~~bega~~ bigarrenarekin berdina.
* Hirugarren angeluak, pregunta et zuen neurtzen eta buruz kalkulatu dugu.
* Angelu guztien totala kalkulatu dugu; 180°
* Bigarren eta hirugarren aldeekin, angeluak kalkulatzeko pausu berberak egin ditugu

1

a	5	90°
b	4	53.13°
c	3	36.87
		180°

2

a	5	66.42°
b	4	47.16°
c	5	66.42
		180°

3

a	6	44.42
b	4	34.05
c	7	101.54
		180.01°

5

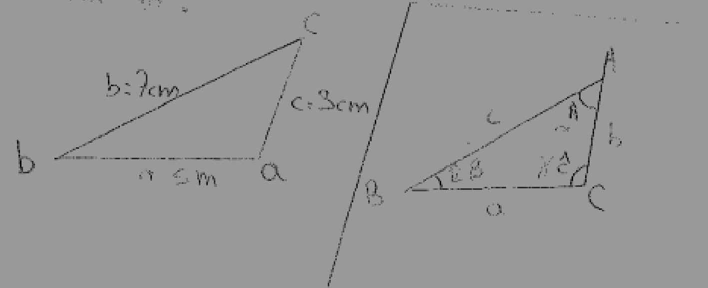
2016/04/~~18~~ 20

Izen-abizenak: 7 Ikaslea eta 8 Ikaslea.

Triangeluak eraikitzen 2, ilustrazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=~~6~~5cm, b=~~8~~7cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

→ Zirkunferentzia bat 7 erradioa daukana da gero 3ko bat, biak elkarrekin diren lekuan bost zentimetroko ... da.



b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

①	aldeak	Angeluak
a	5	120
b	8	21
c	3	29
		180

②	aldeak	Angeluak
a	5	90
b	3	53,13
c	4	34
		180

③	aldeak	Angeluak
a	5	60
b	5	60
c	5	60
		120

④	aldeak	Angeluak
a	5	56
b	4	83
c	6	41
		180

⑤	Aldeak	Angeluak
a	5	73
b	5	35
c	3	73
		180

⑥	Aldeak	Angeluak
a	5	55
b	4	41
c	6	84
		180

- Guk kalkulagailuarekin egin dugu. Azkarragoa da.

④ atalean a eta b ezarri dugu c emaitza ateratzeko.

5

2016/04/15

c. Saiatu zaitezte angeluen arteko erlazioa zein den ondorioztatzen. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

- Guztietan 180 ematen duela
- A lerroa 5cm koa da

6

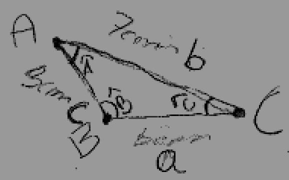
2016/20/15

Izen-abizenak: 9 Ikaslea eta 10 Ikaslea.

Triangeluak eraikitzen 2, ilustrazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=6cm, b=8cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

Erpin batean [illegible] bat egin dugu
Beste erpinean [illegible] 3cmko beste [illegible]
Egin dugu. [illegible] beste partearekin
eta bi erpinekin triangelua egin dugu



b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

Lehendazi triangelua a ariketan egin dugun neurrerekin egin dugu eta triangelua eraiki dugu. Gero bere angeluak atera dugu. Bukatzeko taulan jarri dugu angeluen neurriak eta hori batu dugunea 180°. 180 - 2angeluak egin behar da. 180 - 43,09 - 112,71 = 24,2 eta zenbakia ez digunez irusten horren bidez atera zaigu. Hori egin eta gero beste taula bat egin dugu beste neurri batzu ekin bakarrik aldatu dugula b neurria 6 ra. eta triangelua egin dugu eta beste angelu batzuk eta berdina atera zaigu batuketa totala 180°. Angelu bat ez denez ikusten berriro egin dugu 180 - 2angeluak ateratzeko beste angelua. Kasu honetan 23,93 eman du formula ateratzeko batu ditugu 2 angeluak eta atera duguna eta 180° atera da.

	Aldeak	Angeluak
a	5	43,09
b	7	112,71
c	3	24,2
Totala = 180		

	Aldeak	Angeluak
a	5	56,25
b	6	93,82
c	3	29,93
Totala = 180		

5

2016/04/15

c. Saiatu zaitezte angeluen arteko erlazioa zein den ondorioztatzen. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

180° atera behar da totala.

3 erpin ditugu

3 angelu

Ebaki puntu ba dago

180°ko triangelua da totala

Neurria da aldeak berdinak dira.

6

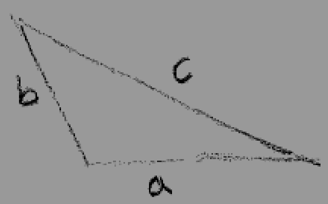
2016/04/~~15~~ 20

Izen-abizenak: 1 Ikaslea eta 2 Ikaslea

Triangeluak eraikitzen 2, ilustrazio-eredua.

a. Ordenagailuan triangelu bat marraztu ezazu hiru aldeak ondokoak izanik: a=6cm, b=8cm eta c=3cm. Ondoren marraztu ezazu orrian (eskuz) triangelua eta izendatu itzazu aldeak, angeluak eta erpinak.

a=5cm b=7cm c=3cm.



· Ordenean

· Bi zirkunferentzia egin ditugu gero ebaki puntuak atera ditugu erpinak lotu ditugu

b. Bi aldeen luzera aldatuz (edo A erpina mugituz) eraiki itzazu beste hainbat triangelu. Idatzi zein den triangelu bakoitzaren aldeen balioa eta angeluen balioa. Esan triangelu bakoitza zein motatakoa den angeluei erreparatuz eta aldeei erreparatuz. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

Kanpoko angeluak neurtzen ditugu eta egiten dugu 360° ken ateratzen dena eta bi angelu jakinda hirugarrena ateratzen dugu.

5

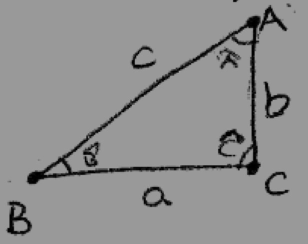
2016/04/15

c. Saiatu zaitezte angeluen arteko erlazioa zein den ondorioztatzen. (Idatzi jarraitzen dizun pauso guztiak).

• Angeluak batuz 180° ateratzen da triangelu guztietan.

6

2016/04/~~18~~20



1 → a → 5 / 21.79
b → 7/ 38.21
c → 3/ 120
180

2 → a → 5/38.21
b → 7 / 81.79
c → 8/ 60
180

3 → a → 5 / 45.57
b → 5 / 88.85
c → 7/ 45.57
180°

•Kampoko angeluak neurtu ditut kenketa egin dut eta atera da.
~~Borobildu dut gero atera~~
•Akatsa → A

7

F. Arrazoi trigonometrikoak, esplorazio-eredua

Sinua

9 Ikaslea eta 10 Ikaslea.

Izen-abizenak:

TRIANGELUEN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

Triangelu zuzenen sinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

lehendabizia 30° neurria jarri dute eta triangelu bat eraiki da. Hipotenusa 12cmkoa da. Aurkako aldearen luzera 6cmkoa da. Angelu bakoitzaren kalkulatu ditu hipotenusa eta aurkako alde horrekin egin dut taula bat. 4 angeluei ateradiot ~~alde~~ hipotenusa eta aurkako aldea.

Nik uste dut erdia atera behar dela baino ez nago ziur kalkulatuko dut ikusteko.

angelua	Hipotenusa	Aurkako aldea	Kenketa Erlazioa	Biderketa Erlazioa	H:A Zatiketa Erlazioa	A:H Zatiketa Erlazioa
30°	12 cm	6 cm	6cm	72 cm	2cm	0,5 cm
30°	13,03cm	6,52cm	6,51cm	71,19256 cm	1,9984cm	0,50 0,5cm
30°	5,49 cm	2,44 cm	3 cm	17191°1cm	2,00338cm	0,49916cm
30°	7,02cm	3,51cm	3,51cm	24,6402cm	2 cm	0,5 cm
50°	4,55 cm	0,4cm	4,15cm	1,82cm		0,00989cm
50°	5,72cm	0,5cm	5,22cm			0,08774cm
50°	1,02 cm	0,09 cm	0,12cm			0,08723cm
50°	10,12cm	0,88cm	9,24cm			0,8695cm
60°	3,2cm	2,77 cm	0,43cm			0,86565cm
60°	5,06cm	4,38cm				0,86561cm
60°	7,2cm	6,24cm				0,866667cm
60°	9,06cm	7,85 cm				0,86644cm
80°	9,03cm	7,91cm				0,9751cm
80°	12cm	11,82cm				0,985cm
80°	20,33 cm	20,02 cm				0,98524cm
80°	50,31 cm	49,58cm				0,98469cm

2016/04/15

1 baino gutxiago

gehienak 0,5 - 0,8 aldean daude baino batzu 0,9 - 1 aldera.

Aurkako aldea : hipotenusa egin behar da.

2

22
2016/04/~~18~~

Izen-abizenak: 1 Ikaslea eta 2 Ikaslea.

TRIANGELUEN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

Triangelu zuzenen sinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

α	hipotenusa	aurkako aldea	erlazioa	
40°	13'27	8'53	1'54	0'64
40°	20'18	12'97	1'55	0'64
40°	10'12	6'5	1'55	0'64
15°	9'22	2'39	3'85	0'25
15°	17'29	4'47	3'86	0'25
15°	44'62	11'55	3'86	0'25
50°	67'50	51'36	1'31	0'76
50°	104'28	79'88	1'30	0'76
50°	159'47	122'16	1'30	0'76
30°	118'36	59'18	1'99	0'5
30°	245'25	122'62	2	0'5
30°	401'63	200'81	2	0'5

aurkako aldea eta hipotenusa zatitzen atera ditugu datuak zenbaki guztiak bere graduarekin erlazioa bute eta dena $\boxed{1}$ baino gutxiago dira

1

2016/04/12

Izen-abizenak: 3 Ikaslea eta 4 Ikaslea.

TRIANGELUEN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

Triangelu zuzenen sinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

α	hipotenusaren luzera	aurkako aldea	erlazioa
40	13'7	8'81	0'64
40	1'91	1'23	0'64
40	14'87	9'5	0'64
40	6'99	4'5	0'64
25	6'44	2'72	0'42
25	13'29	5'62	0'42
25	17'09	7'22	0'42
25	26'59	11'24	0'42
50	37'48	28'71	0'77
50	14'4	11'03	0'77
50	25'23	19'33	0'77
50	40'2	30'8	0'77

1

2016/04/15

35	31'54	18'09	0'57
35	16'03	9'19	0'57
35	38'12	21'86	0'57
35	83'4	47'84	0'57

Zatiketak eginez

Aurkako aldea zati hipotenusaren luzera beti angeluaren arabera zenbaki bat ~~[illegible]~~ edo beste bat ateratzen da

2

2016/04/~~15~~ 22

Izen-abizenak: 5 Ikaslea eta 6 Ikaslea.

TRIANGELUEN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

Triangelu zuzenen sinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

+, −, :, X

α	hip.	aurk. aldea	erlazioa
20°	9'62	3'29	2'92
20°	18'8	6'43	2'92
20°	5'85	2	2'92
20°	49'97	17'09	2'92
13°	43'19	10'84	4'44
13°	20'81	4'68	4'44
x 33°	128'21	69'83	1'83
x 83°	390'75	387'34	1'00

* Triangelu guztien erlazioa, 90°ko angelua daukate. Eta hipotenusa beti da handiagoa aurkako aldearekin konparatuta.

*

α	hip	aurk. aldea	erlazioa
33°	161'17	87'78	1'83
33°	446'34	243'1	1'83
83°	297'4	294'98	1'00
83°	2655'2	~~266'2~~ 2665'2	1'00

* hipotenusa eta aurkako aldeak zatitzen, badugu zenbaki berdina

1

2016/04/~~15~~ 22

Izen-abizenak: 7 Ikaslea eta 8 Ikaslea.

TRIANGELUEN ARRAZOI TRIGONOMETRIKOAK

Triangelu zuzenen sinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondorioztа ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

+ − : x

α	hip	aurk aldea	erlazioa (1)	[illegible] (2)
23°	9'68	3'78	2'5	0'39
23°	15'93	6'22	2'5	0'39
23°	21'74	8'49	2'5	0'39
18°	9'37	2'89	3'23	0.3
18°	16'22	5'01	3'23	0.3
18°	6'21	1'92	3'23	0.3
11°	9'08	1'73	5'24	0.19
11°	20'36	3'89	5'24	0,19
11°	[illegible]	6'12	5'24	0,19
55°	15'53	12'72	1'22	0,81
55°	29'41	24'09	1'22	0,81
55°	11'02	9'03	1'22	0,81
69°	39'09	36'5	1'07	0,93
69°	15'53	14'5	1'07	0,93
69°	9'8	9'21	1'07	0,93

- Denak 90° dituzte

- Gehiketa, kenketa eta biderkatzen ez da ezer aldatzen.

1

2016/04/15

- Angeluaren arabera erlazioa zenbaki bat edo beste aterako da.
- Zatiketas egiter 1 baino gutxiago ateratzen da.

2

Kosinua

2016/04/15

9 Ikaslea eta 10 Ikaslea.

Triangelu zuzenen kosinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

Lehenengo Angelu batzuekin (4) Hipotenusa eta ondoko aldeen luzerak kalkulatuta ditut eta %, x, +, - ekin batekin erlazio bat egingo dot.

O : H
Zatiketa

Angelua	Hipotenusa	Ondoko aldea	Erlazioa
30°	7,1cm	6,15 cm	0,8661cm
30°	5,1cm	4,42cm	0,8669cm
30°	3,1 cm	2,69 cm	0,8677cm
30°	9,1cm	7,88cm	0,8659cm
50°	1,1cm	0,7cm	0,6363cm
50°	3,12cm	2cm	0,6410cm
50°	5,13cm	3,3cm	0,6432cm
50°	7,1cm	4,56cm	0,6422cm
60°	2,1 cm	1,05cm	0,5cm
60°	3,13cm	1,56cm	0,4988cm
60°	4,1cm	2,05cm	0,5cm
60°	6,1cm	3,05cm	0,5cm
80°	1,7cm	0,29cm	0,1705cm
80°	2,4cm	0,42cm	0,175cm
80°	3,1cm	0,54 cm	0,174cm
80°	4,79cm	0,13cm	0,2751cm

3

2016/04/15

1 → Bat baino gutxiago beti aterako da.

2 → Gehienat 0,1 → 0,5 → 0,8 alderakoak.

3 → Ondoko aldera : Hipotenuse esin behar da

4

2016/04/~~15~~ 22

1 Ikaslea eta 2 Ikaslea.

Triangelu zuzenen kosinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

α	Hipotenusa	Ondoko aldearen luzera	Erlazioa	
30°	7'53	6'52	1'15	0'86
30°	12'96	11'23	1'15	0'86
30°	20'6	17'84	1'15	0'86
22°	16'49	15'29	1'07	0'92
22°	24'01	22'26	1'07	0'92
22°	31'53	29'24	1'07	0'92
64°	66'69	29'24	2'28	0'43
64°	91'67	40'18	2'28	0'43
64°	126'48	55'44	2'28	0'43
* 80°				0'17
* 8°				0'99

Hipotenusa zati ondoko aldearen luzera egin dugu.
Hamartar guztiak berdinak dira.
Graduarekin erlazioa.
Ez dakigu zergatia.
* Desberdintasuna ikusteko * 8° eta 80°-rekin egin dugu[3]

2016/04/~~19~~ 22

7 Ikaslea eta 8 Ikaslea.

Triangelu zuzenen kosinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

α 1· hipo : A) luzera

α	hipo	A). luzera	erlazioa (1)	erlazioa (2)
45	9.22	6.52	1.41	0,7
45	4.56	3.22	1.41	0,7
33	3'84	3.22	1.19	0,8
33	5'88	4'93	1.19	0,8
22	5'32	4'93	1,07	0,92
22	9	8.35	1,07	0,92

- hipotenusa eta alde luzea zatitzen puntu bat baino ateratzen da, eta alderantziz azinez puntu bat baino gutxiago.

- Angeluak, gradua eta erlazioak ez dira aldatzen

3

2016/04/~~15~~ 22

5 Ikaslea eta 6 Ikaslea.

Triangelu zuzenen kosinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

∠	hipotenusa	aurkako aldea	erlazioa	alderantzizkoa
15°	6'75	6'52	1'03	0'96
15°	9'07	8'76	1'03	0'96
15°	2'28	2'2	1'03	0'96
26°	6'73	6'05	1'11	0'89
26°	2'12	1'91	1'11	0'89
26°	10'39	9'79	1'11	0'89
38°	12'42	9'79	1'26	0'78
38°	1'09	0'86	1'26	0'78
38°	4'55	3'59	1'26	0'78
47°	5'26	3'59	1'46	0'68
47°	1'86	1'27	1'46	0'68
47°	15'49	10'57	1'46	0'68

* Hipotenusa zati ondoko aldearen eragiketa egin dugu eta erlazio berdina daukate. Konturatu gara kontrako zatikera eginez, ere bai erlazioa daukatela.

3

2016/04/28

Triangelu zuzenen kosinua, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

α	Hipotenusaren luzera	ondoko aldea	erlazioa
45	13'39	9'47	0'71
45	48'03	33'96	0'71
45	17'98	12'72	0'71
25	14'03	12'72	0'91
25	27'73	25'13	0'91
25	33'72	30'56	0'91
35	6'03	4'94	0'82
35	37	30'31	0'82
35	19'81	16'22	0'82
55	28'29	16'22	0'57
55	46'99	26'96	0'57
55	11'99	6'99	0'57

3

2016/04/15

Ondoko aldea zati hipotenusaren luzeran angeluaren araberan zenbaki bat ~~ed~~ edo beste bat ateratzen da, eta erabaki dugu zenbaki guztiak ~~borobildu~~ borobiltzea, erabaidei ona delako

4

Tangentea

2016/04/15

9 Ikaslea eta 10 Ikaslea.

Triangelu zuzenen tangentea, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

Lehendabizi; 3angeluen ~~alboko~~ Aurkako aldea eta ondokoa kalkulato eta bere erlazioa bilduko du alboko aldea : ondokoa eginez

Angelua	ondokoa aldea	~~Alboko~~ aldea	Erlazioa A : O	Erlazioa O : A
30°	2,7 cm	1,56 cm	0,5777cm	1,730cm
30°	3,4 cm	1,96 cm	0,5764cm	1,734cm
30°	4,3cm	2,48cm	0,5767cm	1,733cm
30°	5cm	2,89cm	0,578cm	1,730cm
50°	5cm	5,96cm	1,18cm	0,8389cm
50°	4,1 cm	4,88cm	1,1902cm	0,840cm
50°	7,25cm	7,68cm	1,1911cm	0,986cm
50°	1,14cm	1,36 cm	1,1929cm	0,838cm
80°	2 cm	11,35 cm	5,675cm	0,176cm
80°	3,15cm	17,88cm	5,67619cm	0,176cm
80°	4,1cm	23,24cm	5,66829cm	0,1764cm
80°	6,15cm	34,9cm	5,6747cm	0,1762cm

Angelu baxu bat jartzen ba dut ondoko aldea ~~Alboko~~ Aurkako aldea baino gehiago izango da eta igotzen ba duzu angelua alrebes izango da. 2 zatiketan O : A uste dut egin behar dut eta uste dut 30°ak gehiago atera behar dela uste dut eta besteak gutxiago

5

2016/04/15

- Angelua baxua bada aterako zaigu aurkako aldea ó ondoko aldea baino angelua haundiagoa baldin bada ondoko aldea ó aurkako aldea aterako da.
- Beti 1 baino gutxiago atera behar da.

6

2016/04/22

7 Ikaslea eta 8 Ikaslea.

Triangelu zuzenen tangentea, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

α	X Ondoko Aldearen luzera	y Aurkako aldearen luzera	1 arrazoia	2 erlazioa
22	6,42	2,59	2'47	0,4
22	26'35	10,65	2'47	0,4
52	16,04	20,53	0,78	1,27
52	3,68	4,7	0,78	1,27
6	3,68	6,39	9,43	0,1
6	26'35	2,77	9,43	0,1

1= X:y

2= y:x

·Ondorioak: Alduera aldatzean arrazoia aldatzen da.

5

2016/04/~~15~~ 22

1 Ikaslea eta 2 Ikaslea.

Triangelu zuzenen tangentea, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondorioztа ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

α	Aurkako aldearen luzera	ondoko aldearen luzera	Erlazioa	
30°	3'71	6'42	0'57	1'73
30°	6'82	11'82	0'57	1'73
30°	12'94	22'42	0'57	1'73
52°	28'69	22'42	1'27	0'78
52°	4'16	3'25	1'28	0'78
52°	29'56	23'09	1'28	0'78
6°	1'72	16'32	0'10	9'48
6°	0'48	4'6	0'10	9'58
6°	2'7	25'7	0'10	9'51

Batzuk elkarren artean berdinak dira beste batzuk ez
Guztiak bat baino gehiago edo gutxiago dira.

5

2016/04/~~15~~ 22

5 Ikaslea eta 6 Ikaslea.

Triangelu zuzenen tangentea, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondorioztа ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

α	aurkako aldea	ondoko aldea	erlazioa	alderantzizkoa
3°	0'34	6'42	0'05	18'85
3°	1'46	27'78	0'05	18'38
8°	3'9	27'28	0'14	6'99
8°	0'56	3'99	0'14	6'99
88°	954'97	33'35	28'63	0'03
88°	53'65	1'87	28'63	0'03

(amatu gabe)

* ~~Ikdu~~ Erlazioa aurkako aldea eta ondoko aldea biderkatzen atera dugu.
Eta alderantzizkoa ondoko aldea aurkako aldearekin biderkatzen lortu dugu.

5

27
2016/04/~~15~~

Triangelu zuzenen tangentea, esplorazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

α	aurkako aldea	~~aurkako~~ ondoko aldea	erlazioa
40	5'39	6'42	1'19
40	13'68	16'3	1'19
40	4'31	5'37	1'19
30	3'1	5'37	1'73
30	9'31	16'12	1'73
30	2'76	4'78	1'73
45	4'78	4'78	1
45	12'55	12'05	1
45	3'42	3'42	1
35	2'4	3'42	1'43
35	8'12	11'59	1'43
35	5	7'15	1'43

5

2016/04/15

Ondoko aldea zati aurkako aldea egiten angeluaren arabera zenbaki bat edo beste bat ateratzen da.

6

G. Arrazoi trigonometrikoak, ilustrazio-eredua

2016/04/~~15~~ 27

3 Ikaslea eta 4 Ikaslea.

Ilustrazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

35°ko angeluarekin sinu, kosinu eta tangenta berdina ateratzen da

Berdina 25°ko angeluarekin eta ere bai 45°ko angeluarekin

7

[redacted]

2016/04/15

9 Ikaslea eta 10 Ikaslea.

Ilustrazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

ondoko aldearen ezpin batetik 30° angelu bat egin du. sinua aurkako aldearen luzera zati hipotenusaren luzera egin dugu. kosinua ondoko aldea zati hipotenusa eta Tangentea = aurkako aldeko zati ondokoa.

Hurrengo hiruak angeluak luzatuz egin ditu Erantzun berdinak ateratzea lortzen ere.

Gero angelua 30°-?60° aldatu dut. Lehenengoaren berdina egin dugu sinua, kosinua eta tangentea kalkulatu ditugu 3 kasuetan diferentekin eta ere bai berdin atera zaigu.

Soinua = $\frac{Aa}{h}$ egin dugu. kosinua = $\frac{oa}{h}$ egin dugu. tangentea = $\frac{Aa}{oa}$ egin dugu. Batea 0,86 atera zaigu eta 0,87 atera zaigu gure ustez da 0,86 hori periodikoa izango dela edo 0,86999 zerbait horrela.

Gero berriz ~~aldea~~ angelua aldatu dugu 60°tik-?80°ra. Soinua, tangentea eta konseinua. Berdin atera zaigu guztiak

Arikata honekin badakigu ~~gu~~ angelu baten soinua, tangelua eta konseinua berdinak direla luzera aldatzen badugu edo zein angelu zorrotz batekin.

7

2016/04/~~15~~ 27

5 Ikaslea eta 6 Ikaslea.

Ilustrazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

* Lehenengo triangeluaren angelua 8 izan da. Hipotenusaren luzera 6'48 atera zaigu. Aurkako aldearen luzera 0'9 eta ondoko aldearen luzera 6'42.

* Bigarren triangeluaren angelua 8 izan da. Hipotenusaren luzera 15'02 atera zaigu. Aurkako aldearen luzera 2'09 eta ondoko aldearen luzera 14'87

* Hirugarren triangeluaren angelua 8 izan da. Hipotenusaren luzera 31'2 atera zaigu. Aurkako aldearen luzera 4'34 eta ondoko aldearen luzera 30'89.

→ hauen erlazioa da: Sinua, kosinua eta tangentea berdin ateratzen dela angeluaren arberberengatik.

* Triangelu baterin arazo bat izan dugu. 22 graduko angeluarekin izan da. Sinua desberdina atera zaigu, eta tangentea ere bai.

7

(atzean gehiago) →

2016/04/15

* Egin dugun hurrengo triangeluarekin, berdina gertatu zaigu. 83 graduko angeluarekin izan da.
Tangentea desberdina atera zaigu.

8

7 Ikaslea eta 8 Ikaslea.

2016/04/~~15~~27

Ilustrazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

→ Sin, Cos y tan bat baina txikiagoak ateratzen dira eta angelu berdina dutenean 3 etan emaitza berdina ateratzen da.

7

2016/04/15 1 Ikaslea eta 2 Ikaslea.

Ilustrazio-eredua.

a. Appletean dauden pausuak jarraituz, ondoriozta ezazue zein den agertzen den erlazio trigonometrikoa. Horretarako, idatz ezazu jarraitzen dituzun pausu guztiak eta beharrezkoa bada sortu ezazu taula bat.

- Angelu berdinak dituztenak sinu kosinu eta tangente berdinak ateratzen dituzte. ~~zati~~
- Ateratzeko zatiketa egin behar da.
- Probatu dugu 65-rekin 9-rekin eta 40-rekin, aukeratu ditugu burura etorri zaizkigulako.

7

H. Triangelu zuzenen ebazpena, ilustrazio-eredua

2016/04/29

Izen-abizenak 4 Ikaslea

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

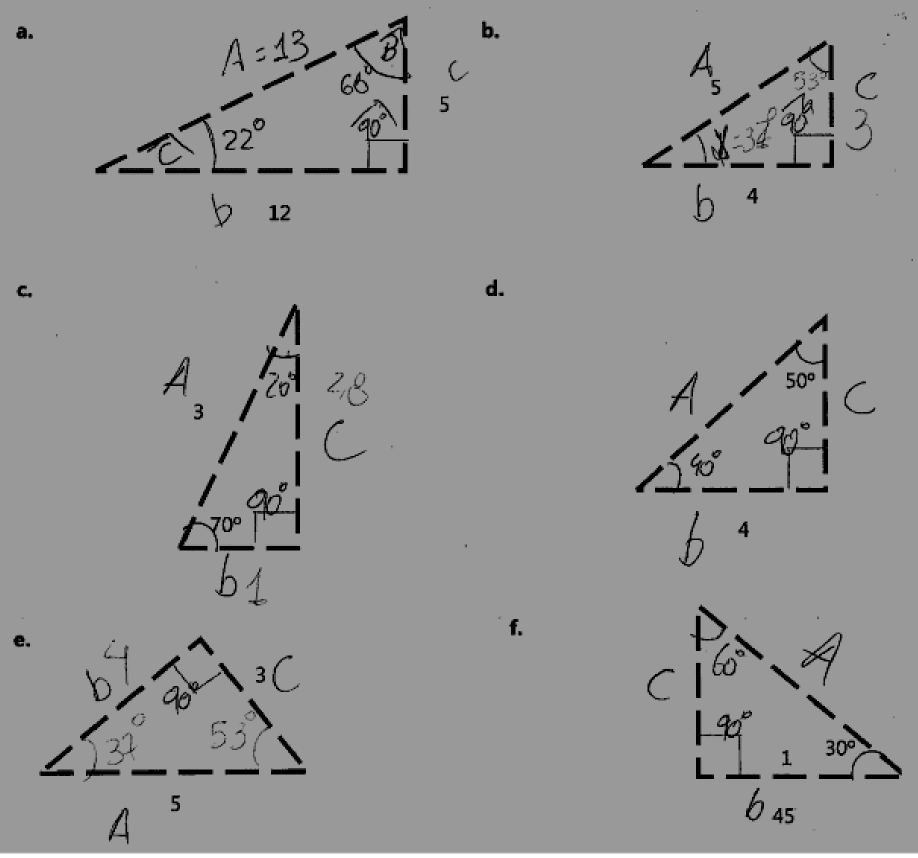
Ebatzi ondoko triangeluak.

Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.



2016/04/29

a. $a^2 = \sqrt{12^2 + 5^2}$

$a = 13$

$\hat{c} = \frac{a}{h} = \frac{5}{13}$

$\hat{c} = 0'38$

$\hat{c} = 0'38 \cdot (\text{SHIFT} + \text{SIN}) = 22'$

b. $c^2 = \sqrt{5^2 + 4^2}$

$c = 6{,}43$

$\hat{c} = \frac{a}{h} = \frac{55}{5}$

$\hat{c} = 1{,}3$ $0{,}6$

$\hat{c} = 36{,}9$

c

3

2016/04/29 10 Ikaslea

Izen-abizenak:

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

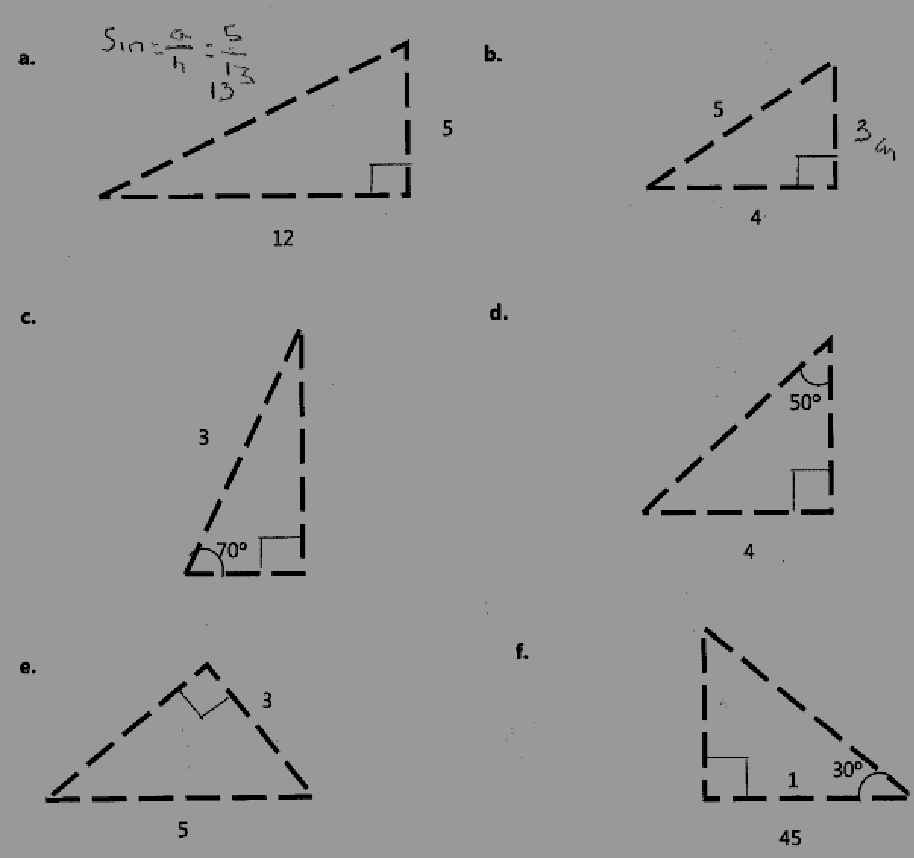
Ebatzi ondoko triangeluak.

Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.



2016/04/29

1

a) 144+25=169=13

b) 25-16=9

$\sqrt{9}$= 3cm

3

2016/04/29

Izen-abizenak 6 Ikaslea

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

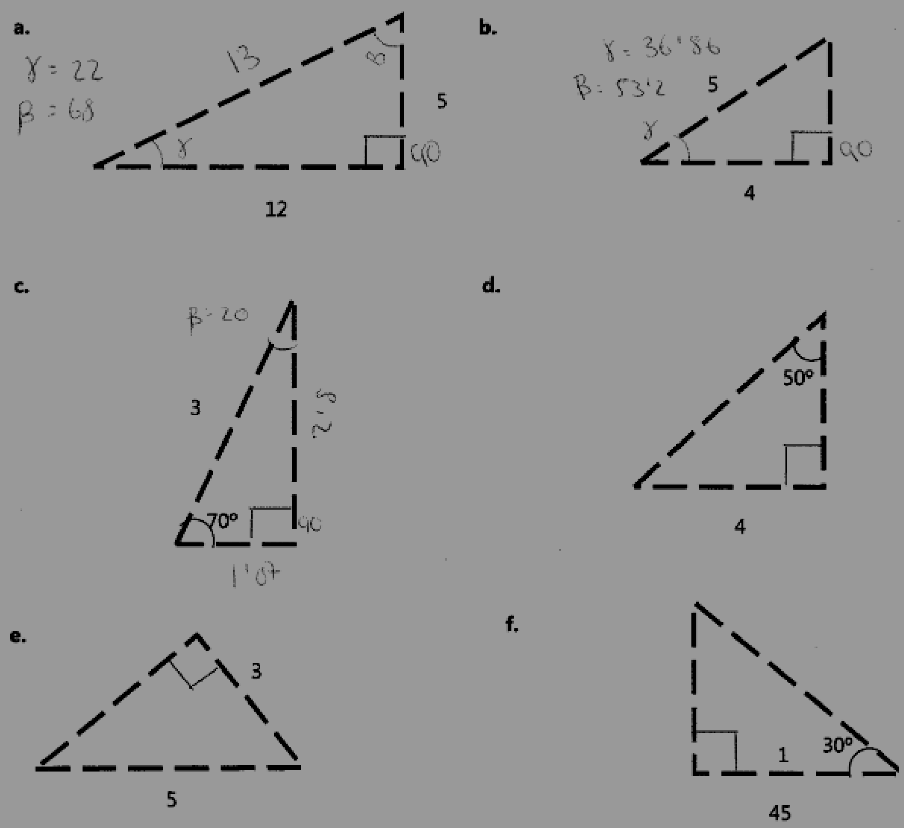
Ebatzi ondoko triangeluak.

Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.



2016/04/29

a) Triangelua egiteke, pitagorasen teorema egin behar da.

$$\boxed{h^2 = K_1^2 + K_2^2}$$

$h^2 = 12^2 + 5^2$

$h^2 = 144 + 25$

$h = \sqrt{164} = \underline{\underline{13}}$

$\sin \gamma = \frac{a}{h} = \frac{5}{13}$

$\sin \gamma = 0'38$

$\gamma = 0'38 \cdot (\text{shift } \sin) = 22$

$\beta = \begin{array}{r} 90 \\ +22 \\ \hline 122 \end{array}$ $180 - 112 = \underline{\underline{68}}$

2

2016/04/29

b) $h^2 = k^2_1 + k^2_2$

$5^2 = 4^2 + c^2 \rightarrow (25 = 16 + c^2)$

$5^2 - 4^2 = c^2 \rightarrow (25 - 16 = c^2 = 9)$

$\sqrt{5^2 - 4^2} = c \rightarrow (\sqrt{9} = 3)$

$\sin \gamma = \frac{c}{5} \rightarrow \frac{3}{5} = 0'6$

$\gamma = 36'86°$

$B = 90 + 36'80 = 126'8$

$180 - 126'8 = 53'2$

c) $B = 70 + 90 = 160$

$180 - 160 = 20$

$\sin 70 = \frac{c}{3}$

$3 \cdot \sin 70 = c = 2'8$

$h^2 = k^2_1 + k^2_2$

$3^2 = b^2 + 2'8^2 \rightarrow 9 = 1'34 + 2'8$

$3^2 - 2'8^2 = b^2 \rightarrow 9 - 7'84 = 1'16$

$\sqrt{3^2 - 2'8^2} = b \rightarrow 1'07$

3

2016/04/29

Izen-abizena 1 Ikaslea

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

Ebatzi ondoko triangeluak.

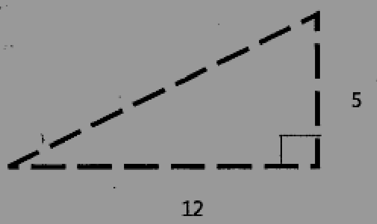
Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

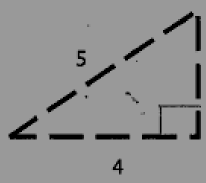
- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.

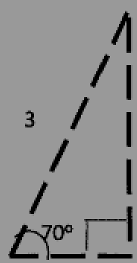
a.



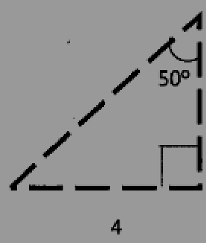
b.



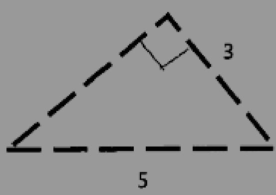
c.



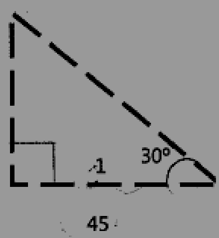
d.



e.



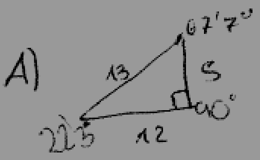
f.



2016/04/29

$\sin\alpha = \frac{a}{h}$

A)



$k^2 = 5^2 + 12^2$

$h^2 = 25 + 144$

$h = \sqrt{169}$

$h = 13$

$\sin\gamma = \frac{5}{13}$

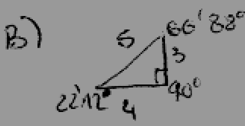
$\sin\gamma = 0'38$

$\gamma = 0'38 \cdot$ (shift sin) $= 22'3$

$90 + 22'3 = 112'3$

$180 - 112'3 = \boxed{67'7^9}$

B)



$k^2 = 5^2 - 4^2$

$k^2 = 25 - 16$

$k = \sqrt{9}$

$k = 3$

$\sin\gamma = \frac{3}{5}$

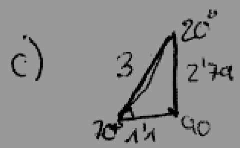
$\sin\gamma = 0'6$

$\gamma = 0'6 \cdot$ (shift sin) $= 22'12$

$90 + 22'12 = 112'12$

$180 - 112'12 = 67'88°$

c)



$90 + 70 = 160$

$180 - 160 = 20°$

$3 \cdot 093 = 6$

$c = 2'79$

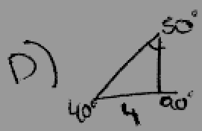
$k^2 = 3^2 - 2'79^2$

$k^2 = 9 - 7'78$

$k = \sqrt{1'22}$

$k = 1'10$

D)



$90 + 50 = 140$

$180 - 140 = 40°$

$\sin 40° = \frac{c}{}$ → sin = c

=

c=

$k^2 =$

$k^2 =$

$k = \sqrt{}$

$k =$

2

2016/04/29

Izen-abizenak: 4 Ikaslea

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

Ebatzi ondoko triangeluak.

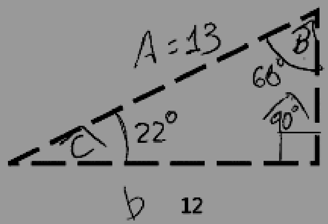
Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

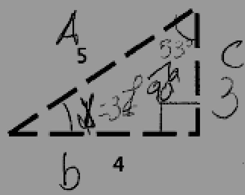
- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.

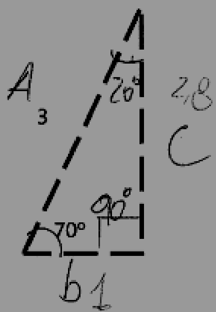
a.



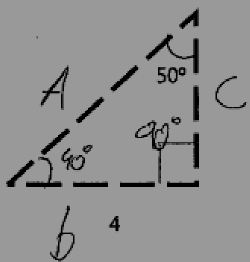
b.



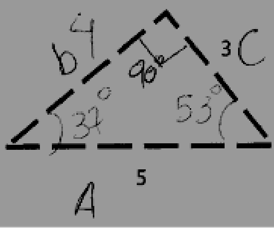
c.



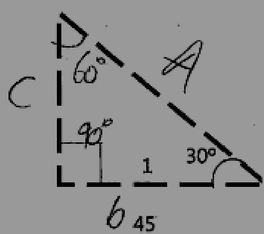
d.



e.



f.



2016/04/29

Izen-abizenak: 9 Ikaslea

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

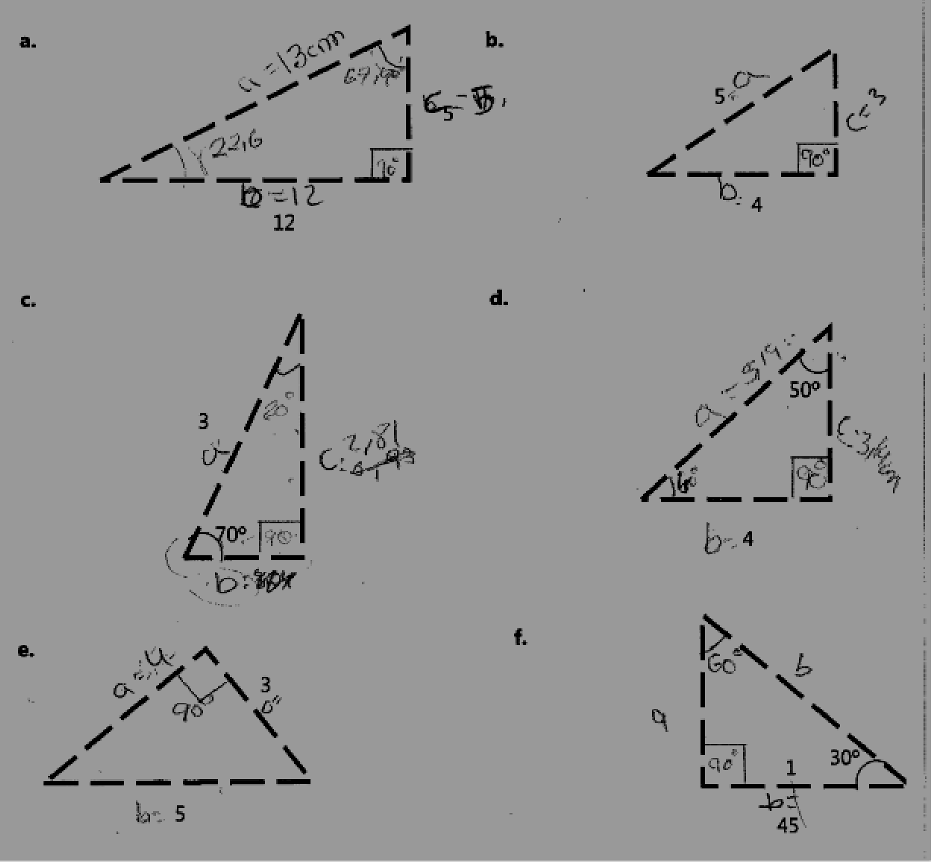
Ebatzi ondoko triangeluak.

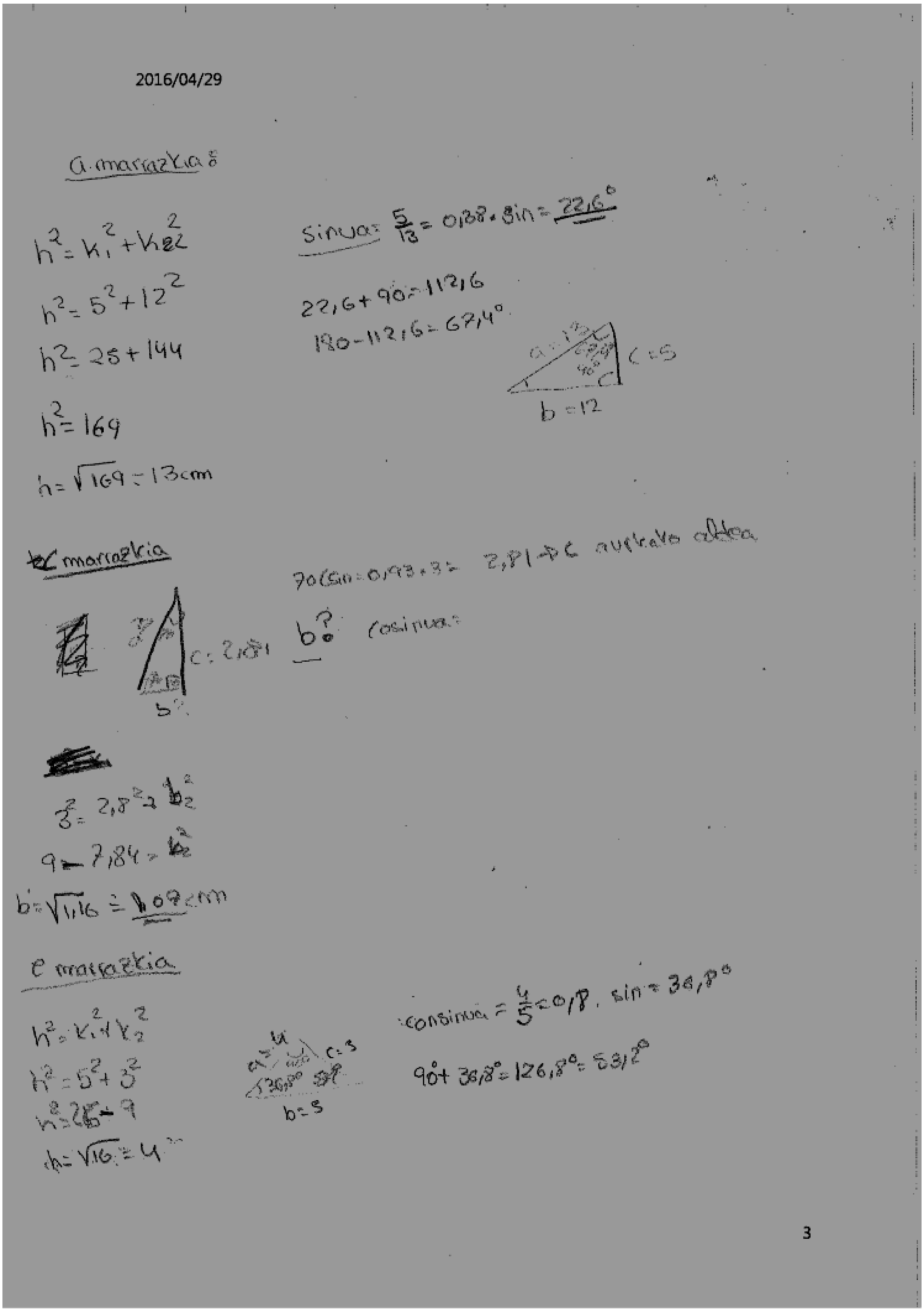
Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.




2016/04/29

a. marrazkia:

$h^2 = k_1^2 + k_2^2$

$h^2 = 5^2 + 12^2$

$h^2 = 25 + 144$

$h^2 = 169$

$h = \sqrt{169} = 13cm$

sinua: $\frac{5}{13} = 0{,}38 \cdot \sin = 22{,}6°$

$22{,}6 + 90 = 112{,}6$

$180 - 112{,}6 = 67{,}4°$

c marrazkia

$70 (\sin = 0{,}93 \cdot 3 = 2{,}81$ → c aurkako aldea

c: 2,81 b? cosinua:

$3^2 = 2{,}8^2 + b^2$

$9 - 7{,}84 = b^2$

$b = \sqrt{1{,}16} = 1{,}07cm$

e marrazkia

$h^2 = k_1^2 + k_2^2$

$h^2 = 5^2 + 3^2$

$h^2 = 25 - 9$

$h = \sqrt{16} = 4$

cosinua = $\frac{4}{5} = 0{,}8 \cdot \sin = 36{,}8°$

$90° + 36{,}8° = 126{,}8° = 53{,}2°$

3

2016/04/29

Izen-abizenak: 8 Ikaslea

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

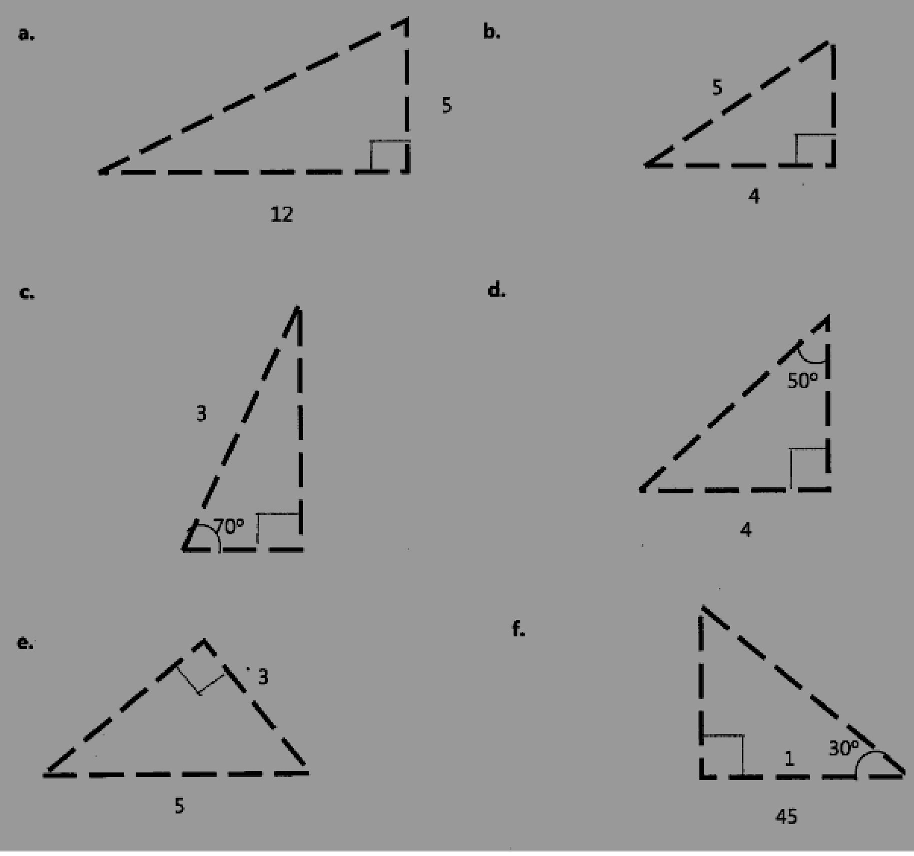
Ebatzi ondoko triangeluak.

Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

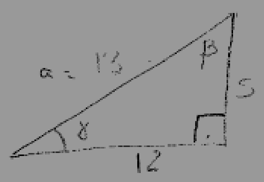
- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.



2016/04/29

a) Pitagoras



$\sin \gamma = \frac{a}{h} = \frac{5}{13}$

$\sin \gamma = 0'38$

$\gamma = 0'28 \cdot (\text{shift sin}) = 22'5$

2

2016/04/29

Izen-abizenak: 5 Ikaslea

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

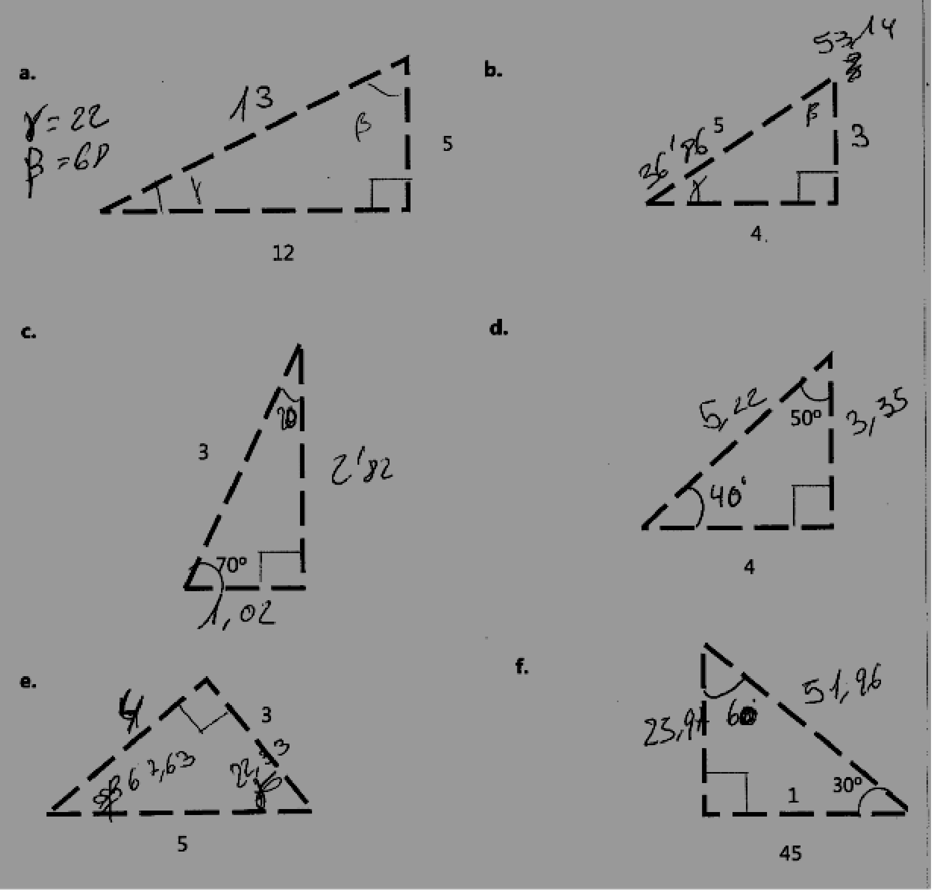
Ebatzi ondoko triangeluak.

Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.



2016/04/29

a) triangeluan pitagorasen teorema.

$h^2 = k^2 + k^2$

$h^2 = 12^2 + 5^2$

$h^2 = 144 + 25$

$h = \sqrt{169} = 13$

$\sin\gamma = \frac{a}{h} = \frac{5}{13}$

$\sin\gamma = 0'38$

$\gamma = 0'38$ (shift + sin) = 22°

$\beta =$

$90 + 22 = 112$

$180 - 112 = 68$

b) lehenengo ariketan egindako pausoak erabili ditut.

$h^2 = k^2 + k^2$

$k^2 = h^2 - k^2$

$k^2 = 5^2 - 4^2$

$k^2 = 25 - 16$

$k = \sqrt{9} = 3$

$\sin\gamma = \frac{a}{h} = \frac{3}{5}$

$\sin\gamma = 0,6$

$\gamma = 36,86$

$90 + 36,86 = 126,86$

$180 - 126,86$

$\beta = 53,14$

c)

$90 + 70 = 160$

$180 - 160 = 20$

$\beta = 20°$

$\sin 70 = \frac{c}{3}$

$3 \sin 70 = c = 2'82$

$k^2 = h^2 - k^2$

$k^2 = 3^2 - 2'82^2$

$k^2 = 9 - 7,95$

$k = \sqrt{1,05} = 1,02$

2

2016/04/29

d) triangelua.

$\cos 40 = \frac{4}{h}$

$\sin 90 = \frac{c}{4}$

$h = 5,22$

$4 \cdot \sin 70 = C =$

$h^2 = k^2 + k^2$

$k^2 = h^2 - k^2$

$k^2 = 5,22^2 - 4^2$

$k^2 = \sqrt{11,24} = k\,3,35$

---

e) triangelua.

$\sin \gamma = \frac{a}{h} = \frac{4}{5}$

$h^2 = h^2 - k^2$

$k^2 = 5^2 - 3^2$

$k^2 = 25 - 9$

$k = \sqrt{16} = 4$

$\gamma = 0,8$

$\gamma = 22,33$

$90 + 22,33 = 112,37$

$180 - 112,37 = \beta\ 67,63$

---

f) triangelua.

$90 + 30 = 120$

$180 - 120 = \beta\ 60°$

$\cos 30 = \frac{45}{h} = 51.96$

$\cancel{h^2 = 38,97^2 - 45^2}$

$\cancel{k^2 = 1.518,66 - 2.025}$

$\cancel{k = \sqrt{}}$

$k^2 = 51,96^2 - 45^2$

$k = \sqrt{674,84} = 25,97$

2016/04/29

Izen-abizena 2 Ikaslea

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

Ebatzi ondoko triangeluak.

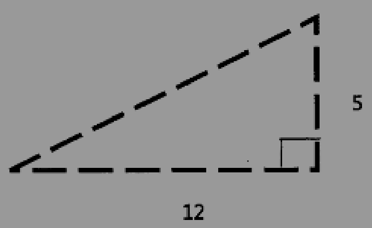
Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

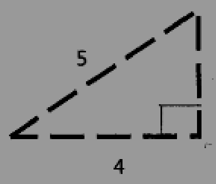
- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.

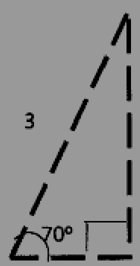
a.



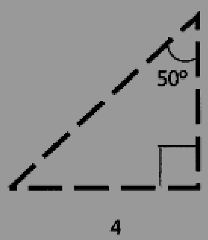
b.



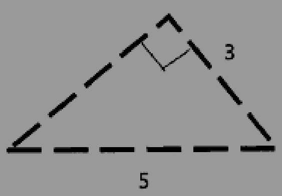
c.



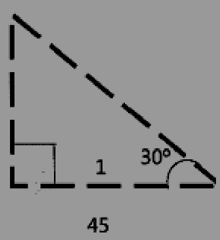
d.



e.



f.



2016/04/29

D)

$\sin 50 = \frac{4}{a}$

$a = 4 \div \sin 50 = 5'22$

$h^2 = k^2 + k'^2$

$5'22^2 = 4^2 + k^2$

$\sqrt{5'22^2 - 4^2} = k^2$

$\sqrt{27'24 - 16} = k^2$

$\sqrt{11'24} = \boxed{3'35}$

3

2016/04/29

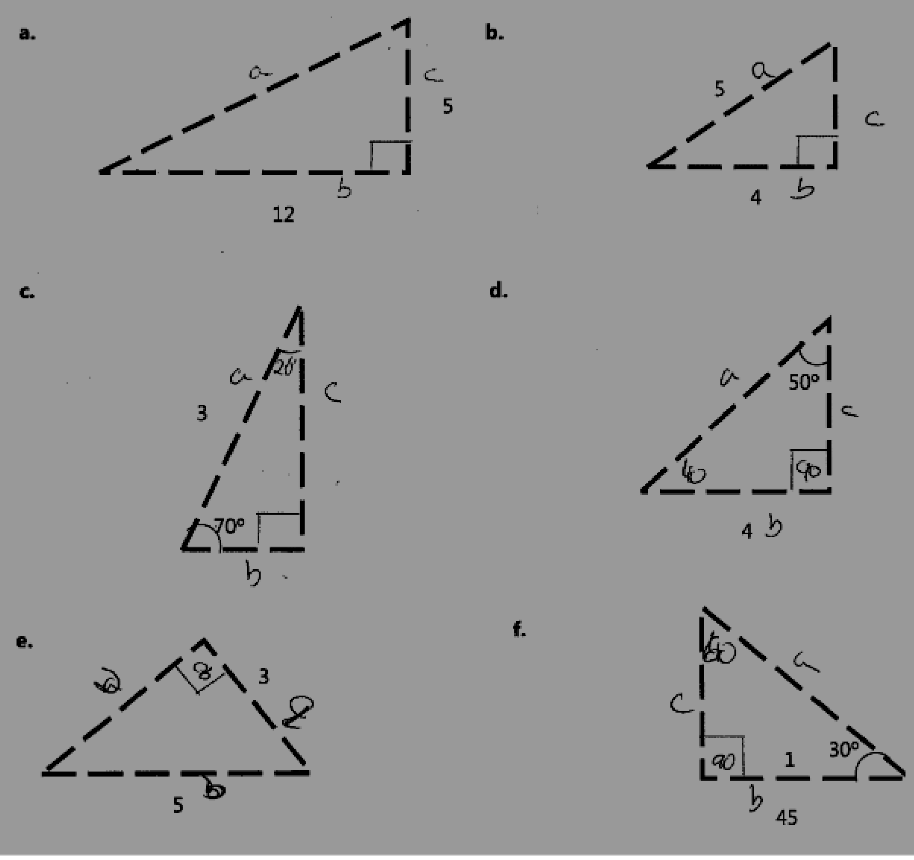
Izen-abizenak: 3 Ikaslea

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

Ebatzi ondoko triangeluak.
Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:
- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.



2016/04/29

(a) $h^2 = k_1^2 + k_2^2$

$a^2 = 12^2 + 5^2$

$a^2 = 144 + 25$

$a^2 = \sqrt{169}$

$a = 13$

$\sin\gamma = \frac{a}{h} = \frac{5}{13}$ $\quad \sin\gamma = 0'38$

$\gamma = 0'38 \cdot (\text{shift sin}) = 22'3^\circ$

$\cancel{\beta = 180 - 22'3 = 67'7^\circ}$ $\quad \alpha = 90^\circ$

$\cancel{\beta = 157'7}$ $\quad \beta = 180 - 90 - 22'3$

$\beta = 67'7$

(b) $h^2 = k_1^2 + k_2^2$

$5^2 = 4^2 + c^2$

$\cancel{c^2 = 25}$ $\quad c^2 = 5^2 - 4^2$

$c^2 = 25 - 16$

$c^2 = \sqrt{9}$

$c = 3$

$\sin\gamma = \frac{a}{h} = \frac{3}{5}$ $\quad \sin\gamma = 0'6$

$\gamma = 36'8^\circ$

$\alpha = 90^\circ$

$\cancel{\beta = 180 - 36'8}$ $\quad \cancel{\beta = 53'2^\circ}$

$\cancel{\beta = 143'2}$

$\beta = 180 - 90 - 36'8$

$\beta = 53'2$

(c)

~~sen 0'94~~

$\sin\gamma = 0'94$

$0'94 \cdot 3 = 2'82$

$h^2 = k_1^2 + k_2^2$

$3^2 = 2'82^2 + c^2$

$c^2 = 2'28^2 - 3^2$

$c^2 = 2'95 - 9$

$\alpha = 90$

$\gamma = 70$ $\quad \beta = 20$

$c = 1'05$

(d) $\sin\gamma = \frac{4}{a} = 0'77$ $\quad a = 5'19$

$h^2 = k_1^2 + k_2^2$ $\quad 5'19^2 = 4^2 + c^2$ $\quad c^2 = 26'93 - 16$

$c^2 = \sqrt{10'93}$

$c = 3'30$

3

2016/04/29

e) $h^2 = k_1^2 + k_2^2$

$5^2 = 3^2 + c^2$

$c^2 = 5^2 - 3^2$

$c^2 = 25 - 9$

$c^2 = \sqrt{16}$

$c = 4$

$a = 90^\circ$

$\beta = 53'2^\circ$

$\gamma = 36'8^\circ$

f) $a = 90^\circ$

$\gamma = 30^\circ$

$\beta = 60^\circ$

$\sin 60 = 0'86$ $\quad \frac{45}{a} = 0'86 \quad a = 52'32$

$h^2 = k_1^2 + k_2^2 =$

$52'32^2 = c^2 + 45^2$

$c^2 = 52'32^2 + 45^2$

$c^2 = 2737 - 2025$

$c^2 = \sqrt{712}$

$c = 26'68$

4

• Alde luzena (h)
hipotenusa

$$h^2 = k_1^2 + k_2^2$$

2016/04/29

Izen-abizena: 7 Ikaslea

TRIANGELUEN ZUZENEN EBAZPENA (ilustrazio eredua)

Ebatzi ondoko triangeluak.

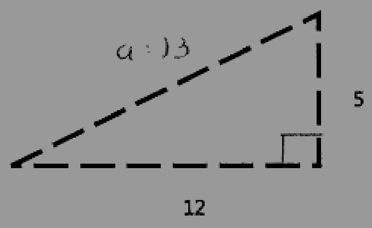
Esan zein den bere alde guztien neurria eta angelu guztien balioa. Horretarako aurreko klaseetan erabilitako tresnak aplikatu beharko dituzu. Angeluen arteko erlazioa, sinua, kosinua, tangentea eta beharrezkoak ikusten dituzun eta ezagunak diren tresnak ere.

Egin behar dena:

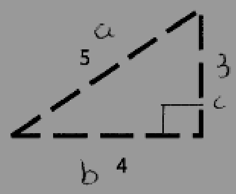
- Dituzun datuak argi izan
- Metodoa hautatu eta idatzi zein den
- Egiten dituzun eragiketa guztiak idatzi
- Ateratzen dituzun ondorioak idatzi
- Beharrezkoa ikusten duzun guztia idatzi (ez baduzu ulertzen, nahasten bazara, neurri arraroak ateratzen bazaizkizu,...)

* Prozedura ez ezazu begiratu azken momentura arte.

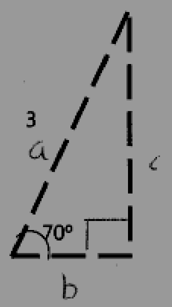
a.



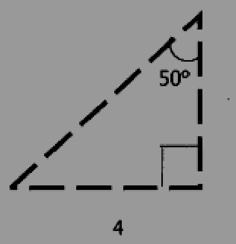
b.



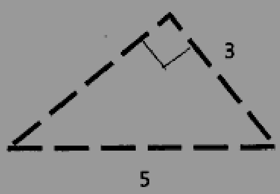
c.



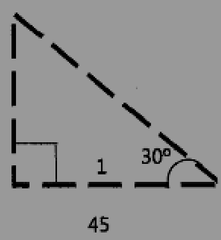
d.



e.



f.



"PITAGORAS"

2016/04/29

$12^2 = 144$ $144 + 25 = 169$

$5^2 = 25$ $\sqrt{169} = 13$

(a)

$a^2 = 12^2 + 5^2$

$a = 13$

$\sin \gamma = \frac{a}{h} = \frac{5}{13}$ $\frac{5}{13} = 0'38$

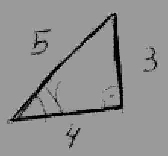
$\sin \gamma = 0'38$

$\gamma = 0'38 \cdot$ (Shift + sin) = 22

(b)

$\sqrt{5^2 - 4^2} = c$

$c = 3$



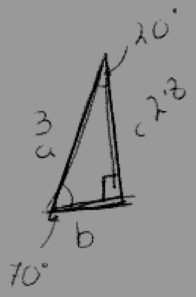
126,86°

$\sin \gamma = \frac{3}{5}$

$\sin \gamma = 0,6$

$\gamma = 0'6 = 36'86°$

(c)



$90 + 70 = 160$

$180 - 160 = 20$

$\sin 70 = \frac{c}{3}$

$3 \cdot \sin 70 = c = 2'8$

$2'8^2 + 3^2 =$

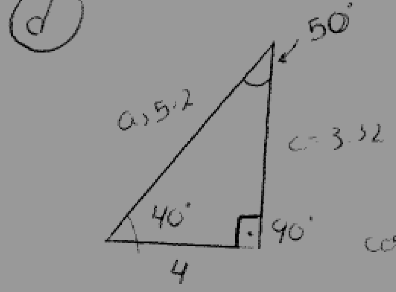
$7'84 - 9$ $9 - 7'84 = 1'16$

$9 - 7'84 = 1'16$ $b = 1'16$

2

2016/04/29

d



$90 + 50 = 140$
$180 - 140 = 40$

$\cos 40° = \frac{4}{a}$

$a = \frac{4}{\cos 40} = 5.2$

$h^2 = k^2 + k^2$

$5.2^2 = 4^2 + k^2$

$\cancel{16 - 27.04}$

$27.04 - 16 = 11.04 = c^2$

$c = 3.32$

3